Całki powierzchniowe zorientowane

(opracowanie: Agnieszka Görlich)

1. Oblicz:

   a) $\int\int_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, gdzie S jest zorientowaną dodatnio powierzchnią $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u \end{cases}$, $u \times v \in [0,1] \times [0,1]$,

   b) $\int\int_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, gdzie S jest zorientowaną na zewnątrz powierzchnią $x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq h$,

   c) $\int\int_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdy$, gdzie S jest kołem $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$, $z = 0$ zorientowanym "w dół",

   d) $\int\int_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, gdzie S jest wewnętrzną stroną sfery o środku w punkcie $(0,0,0)$ i promieniu R,

   e) $\int\int_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$, gdzie S jest zorientowaną dodatnio powierzchnią $\begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = v \end{cases}$, $u \times v \in [0, 2\pi] \times [0,1]$,

   f) $\int\int_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, gdzie S jest górną stroną powierzchni $z = 1 - x^2 - y^2$, odciętą płaszczyzną $z = 0$,

   g) $\int\int_S xdydz + y^2dzdx + z^3dxdy$, gdzie S jest wewnętrzną stroną sześcianu ograniczonego płaszczyznami $x = \pm 1, y - \pm 1, z = \pm 1$,

   h) $\int\int_S xydydz + yzdzdx + zxdxdy$, gdzie S jest zewnetrzną stroną ostrosłupa ograniczonego płaszczyznami $x = 0, y = 0, z = 0, x+y+z = 1$.

2. Sprawdź, że dla pola $\vec{F}$ oraz płata zorientowanego S zachodzi twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego:

   a) $\vec{F} = [x, y, z]$, S jest wewnętrzną stroną sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

b) $\vec{F} = [x^3, y^3, z^3]$, S jest zewnętrzną stroną bryły $x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 4$,

c) $\vec{F} = [2x, 2y, 2z]$, S jest zewnętrzną stroną powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

3. Oblicz

   a) $\int\int_S xzdydz + xydzdx + xzdxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni $x^2 + y^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0, z = k$,

   b) $\int\int_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, gdzie S jest zorientowaną na zewnątrz powierzchnią $2 \leq z \leq 3 - (x^2 + y^2)$.

4. Korzystając z twierdzenia Stokesa wyznacz cyrkulację pola wektorowego $\vec{F} = [y, 2, xyz]$ wzdłuż okręgu $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

5. Korzystając z twierdzenia Stokesa oblicz:

   (a) $\int_\Gamma xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$, gdzie $\Gamma : x = \cos t . y = \sin t, z = \sin t + \cos t,\ t \in [0, 2\pi]$,

   (b) $\int_\Gamma x^2zdx + y^2dy - xz^2dz$, gdzie $\Gamma : x^2 + z^2 = R^2, y = 0$ jest skierowana przeciwnie do ruchów wskazówek zegara.