

- 1) Przestrzeń afiniczna $(X, V, +)$ składa się ze zbioru punktów X , przestrzeni wektorowej V , oznaczanej przez $\vec{X}$ i nazywanej kierunkiem (przestrzenią kierunkową) X , oraz działania zewnętrznego $+: X \times V \ni (x, v) \mapsto x + v \in X$. Działanie to jest nazywane translacją lub przesunięciem o wektor. Wymiarem przestrzeni afinicznej jest wymiar jej przestrzeni kierunkowej.
- 2) Układem współrzędnych w przestrzeni afinicznej $(X, \vec{X}, +)$ nazywamy uporządkowaną parę (O, B) , gdzie $O \in X$ jest ustalonym punktem nazywanym początkiem układu współrzędnych, zaś $B = (e_1, \dots, e_n)$ jest dowolną bazą przestrzeni $\vec{X}$. Współrzędnymi punktu $x \in X$ w układzie $(O, e_1, \dots, e_n)$ nazywamy taką uporządkowaną n -kę skalarów $(x_1, \dots, x_n)$, że $x = O + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$.
- 3) WKW na podprzestrzeni afinicznej: niech X będzie przestrzenią afiniczną, $U \subset \vec{X}$, $\emptyset \neq Y \subset X$ oraz niech y_0 będzie dowolnym punktem z Y .

Y jest podprzestrzenią afiniczną X o przestrzeni kierunkowej $\vec{Y} = U$

$\Leftrightarrow$

$$Y = y_0 + U = \{y = y_0 + v : v \in U\}$$

- 4) W zależności od wymiaru podprzestrzeni Y n -wymiarowej przestrzeni afinicznej X nazywamy prostą afiniczną, gdy $\dim Y = 1$, płaszczyzną afiniczną, gdy $\dim Y = 2$ lub hiperpodprzestrzenią (hiperpłaszczyzną) afiniczną, gdy $\dim Y = n - 1$.
- 5) Dwie podprzestrzenie afiniczne $(Y_1, \vec{Y}_1, +)$ oraz $(Y_2, \vec{Y}_2, +)$ tej samej przestrzeni afinicznej $(X, \vec{X}, +)$ są do siebie równoległe jeżeli $\vec{Y}_1 \subset \vec{Y}_2$ lub $\vec{Y}_2 \subset \vec{Y}_1$.
- 6) W przestrzeniach afinicznych oraz geometrii analitycznej na oznaczenie punktów będziemy stosowali zapis z nawiasami okrągłymi (x, y, z) , natomiast zapis z nawiasami kwadratowymi $[x, y, z]$ na oznaczenie wektorów.

Zadanie 1. Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ jest ciałem i niech $b \in \mathbb{K}^n$. Udowodnij, że jeśli zbiór $Y = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = b\}$ jest niepusty, to Y jest podprzestrzenią afiniczną w $\mathbb{K}^n$, przestrzeń $\vec{Y}$ jest zbiorem rozwiązań układu $Ax = \vec{0}$ oraz $\dim Y = n - \text{rz } A$.

Zadanie 2. Pokaż, że uporządkowana trójka $(\mathbb{C}, \mathbb{R}^2(\mathbb{R}), +)$, gdzie działanie $+: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ dane jest wzorem $(a + bi) + (x, y) = (a - x) + (b + x + y)i$ dla dowolnych $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, jest przestrzenią afiniczną. W tej przestrzeni znajdź równanie prostej afinicznej przechodzącej przez punkty $A = 1 - i$ i $B = -2 + 3i$.

Zadanie 3. Niech:

$$Y = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2, 2x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0\}.$$

Sprawdź, że Y jest podprzestrzenią afiniczną wymiaru 2 oraz napisz równanie podprzestrzeni afinicznych wymiaru 2 oraz wymiaru 1, równoległych do Y i przechodzących przez punkt $a = (2, -1, 1, 2)$.

Zadanie 4. Niech $(A; e_1, e_2, e_3)$ będzie układem współrzędnych w $\mathbb{R}^3$, gdzie:

$$e_1 = [2, 2, -3], \quad e_2 = [2, 1, -1], \quad e_3 = [4, 1, -2].$$

Znajdź początek układu A , jeżeli wiadomo, że punkt $P = (1, 2, 3)$ ma współrzędne $x_1 = 2, x_2 = -5$ oraz $x_3 = 1$. Wyznacz współrzędne punktu $Q = (-1, 5, 2)$ względem układu $(P; e_1, e_2, e_3)$.

Zadanie 5. W $\mathbb{R}^4$ dana jest hiperpłaszczyzna $\pi: 2x + my - 3(k + 1)z + t - 1 = 0$ i prosta $l: (x, y, z, t) = (1, 2, -1, 1) + u[0, 3, 0, 6]$. Dla jakich wartości parametrów m i k zachodzi:

- $\pi \parallel l$,
- $\pi \cap l$ składa się dokładnie z jednego punktu,
- $l \subset \pi$.

Zadanie 6. Niech $X = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]_2 : -2a + 3b + 4c + 2 = 0\}$ będzie zbiorem punktów w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}[x]_2$. Wykaż, że X jest podprzestrzenią afiniczną. Ponadto wyznacz w X taki układ współrzędnych $(A; e_1, e_2)$, w którym punkt $P = 4x^2 - 2x + 3$ ma współrzędne $\alpha = 3, \beta = 2$, natomiast A jest punktem należącym do prostej:

$$l = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]_2 : a - 2b - 3c + 1 = 0, 2a + b - c + 2 = 0\}.$$

Zadanie 7.

- Udowodnij, że zbiór $Y = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} -a + b - 2c + 3d = -2 \\ 2a - b - c + 2d = 3 \end{array} \right\}$ jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbf{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Wyznacz jej kierunek i wymiar.
- Dane są punkty $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Wyznacz równanie parametryczne hiperpłaszczyzny $H \subset \mathbf{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ takiej, że $A, B \in H$ oraz $Y \parallel H$.
- W przestrzeni Y wyznacz taki układ współrzędnych o środku $C = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, aby punkt $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ miał współrzędne równe $x_1 = 2, x_2 = 3$.