Zadania powtórkowe przed egzaminem

---

1. Dana jest liczba zespolona $z = -5(\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6})$. Wyznacz $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{re} z$ oraz $\operatorname{im} z$.

2. Rozwiąż równanie w dziedzinie zespolonej $(3+2i)^6 - z^3 = 0$.

3. Znajdź wszystkie pierwiastki wielomianu $w(z) = z^5 + 8z^2$, $z \in \mathbb{C}$.

4. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ -x - y + 2z = -1 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$.

5. Zbadaj liczbę rozwiązań układu w zależności od parametru $k \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x + 3y + (k+2)z = k - 1 \\ -x - y + kz = -1 \\ kx + 3y - z = k \end{cases}.$$

6. Sprawdź czy wektory $B = \{(1,-1,2),(2,-2,3),(0,1,1)\}$ stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Jeżeli tak, to znajdź współrzędne wektora $(1,1,1)$ w tej bazie.

7. Sprawdź czy zbiór wektorów
$$W = \{(2a - b + c, a + b + 2c, -3a + b - 2c) \colon a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$
jest podprzestrzenią wektorową. Jeżeli tak, to wyznacz jej bazę i wymiar.

8. Oblicz objętość czworościanu rozpietego na wektorach $(2,3,1)$, $(-3,2,-1)$, $(1,2,3)$.

9. Sprawdź, czy zbiór wektorów $\{(1,0,1),(1,2,-1),(-1,1,1)\}$ jest bazą ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

10. Znajdź odwzorowanie liniowe $f^{-1} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jeżeli wiadomo, że $f(-1,-1,0) = (2,0,1)$, $f(1,1,1) = (-2,1,1)$ i $f(0,1,1) = (-1,2,0)$.

11. Dane jest odwzorowanie liniowe

$$f(x,y,z) = (x - 2y + 2z, -2x + 3y - z, -x + 4z).$$

Znajdź jądro i obraz oraz wyznacz ich bazy i wymiary.

12. Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ jest macierzą odwzorowania linoiwego f. Wyznacz wymiar jądra i obrazu tego odwzorowania.

13. Macierz $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ jest macierzą przejścia z bazy B do $K = ((1,0);(0,1))$. Wyznacz wektory bazy B.

14. Wektor v w bazie $B = ((1,-1,1);(0,1,1);(1,1,2))$ ma współrzędne $v = [1,1,1]_B$. Wyznacz jego współrzędne w bazie $B_1 = ((0,1,1);(1,1,0);(0,0,1))$.

15. Niech $w(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy A. Oblicz $\det A$, $\operatorname{rz} A$ oraz $\operatorname{tr} A$.

16. Sprawdź, czy endomorfizm $f(x,y,z) = (-x+y+2z, x+2y+z, 2x+y-z)$ jest diagonalizowalny. Jeżeli tak, to wyznacz bazę B_λ taką, że macierz D tego endomorfizmu jest macierzą diagonalną. Podaj tę macierz D.