

1. Rozwiń funkcję w szereg Fouriera oraz narysuj przebieg funkcji będącej sumą tego szeregu w zadanym przedziale:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad [-3\pi, 3\pi]$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad [-3\pi, 3\pi]$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad [-3, 3]$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad [-3, 3]$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad [-3\pi, 3\pi]$$

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 & -\pi < x < 0 \\ \pi^2 - x^2 & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad [-3\pi, 3\pi]$$

$$f(x) = x + \pi \quad -\pi < x < \pi \quad [-3\pi, 3\pi]$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad [-3\pi, 3\pi]$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < -1 \\ -2 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad [-6, 6]$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -5 < x < 0 \\ 1+x & 0 \leq x < 5 \end{cases} \quad [-15, 15]$$

$$f(x) = e^x \quad -\pi < x < \pi \quad [-3\pi, 3\pi]$$

2. Wyznacz transformatę Fouriera sygnału $f(x) = \cos[u(x)\omega_0 x]$ gdzie $u(x)$ – funkcja skoku jednostkowego.

3. Jeśli $f(x) \leftrightarrow F(\omega)$ to udowodnij, że $\frac{df(x)}{dx} * \frac{1}{\pi x} \leftrightarrow \omega F(\omega)$

4. Udowodnij bezpośrednim rachunkiem tożsamość:

$$F[f(x)g(x)] = \frac{1}{2\pi} [F(\omega) * G(\omega)]$$

5. W dziedzinie częstotliwości udowodnij, że

$$a) \quad f(x-a) * g(x-b) \leftrightarrow s(x-a-b)$$

$$b) \quad (f(x)e^{i\omega_0 t}) * (g(x)e^{i\omega_0 t}) \leftrightarrow s(x)e^{i\omega_0 t}$$

$$\text{gdzie} \quad s(x) = f(x) * g(x)$$

6. Korzystając z twierdzenia Parsevala oblicz wartości całek niewłaściwych:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sa^2(at) dt \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{\infty} Sa^4(at) dt \quad \left(Sa(t) = \frac{\sin t}{t} \right)$$

7. Korzystając z twierdzenia Rayleigha oblicz wartość całki niewłaściwej $\int_{-\infty}^{\infty} Sa^3(at) dt$

8. Udowodnij że widmowa gęstość energii sygnału jest transformatą Fouriera funkcji autokorelacji tego sygnału.

9. Niech $g(x)$ będzie sygnałem przyczynowym oraz niech

$$g(x) \leftrightarrow G(\omega) = R(\omega) + iQ(\omega)$$

Wykazać słuszność wzorów:

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(v)}{\omega - v} dv \quad Q(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(v)}{\omega - v} dv$$

10. Wiedząc, że transformacja Fouriera funkcji $f(t) = \Pi(t)$ $-\infty < t < \infty$ jest równa

$F(\omega) = 2\sin(\omega/2)/\omega$ oblicz transformację Fouriera funkcji $g(t) = 3\Pi(t-0.5)\cos(2\omega_0 t)$. Z jakich twierdzeń należy skorzystać?