Elementy logiki dla informatyków

Wykład I

Podstawy matematyczne. Zbiory, relacje, odwzorowania, grafy i drzewa

Drzewa

*[10,150][2,2] pstrics,pst-node,pst-tree

Zbiory

Pojęcie zbioru

Pojęcie *zbioru* jest powszechnie stosowane w matematyce i w języku codziennym. Przyjmuje się, że pojęcia zbioru nie definiuje się (pojęcie pierwotne). Intuicyjnie, oznacza ono zestaw lub kolekcję pewnych elementów. Zwykle przyjmuje się, że są to elementy podobne, jednakowego typu. Jednak znane są próby definicji tego pojęcia, np.

Definicja 1 *Przez* **zbiór** *rozumiemy złączenie M określonych rozróżnialnych obiektów naszego doświadczenia poglądowego lub naszej wyobraźni w jedną całość (*Georg Cantor, 1845-1918*).*

Te rozróżnialne obiekty nazywamy właśnie elementami zbioru M. Stosowana jest następująca notacja:

- $m \in M$: obiekt (element) m należy do zbioru M,
- $m \notin M$: obiekt (element) m nie należy do zbioru M,
- $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$: zbiór M składa się (tylko i wyłącznie) z elementów $m_1, m_2, \ldots, m_k$,
- $M = \{m \in U : \phi(m)\}$: zbiór M składa się (tylko i wyłącznie z tych elementów zbioru U (universum), które spełniają warunek (logiczny) zdefiniowany formułą $\phi(m)$.

Kolejność elementów w zbiorze nie jest istotna. Każdy element zbioru może wystąpić w nim tylko raz. Zbiory mogą być skończone (k-elementowe, $k \geq 0$) lub nieskończone.
Liczbę elementów zbioru M oznaczamy przez $||M||$, card(M), lub $\#M$.

Zbiory

Definiowanie zbiorów

Zbiory mogą być definiowane w następujący sposób:

- **ekstensjonalnie**, tzn. poprzez wyliczenie wszystkich elementów, np. $\{pon., wt., śr., czw., pt., so., niedz.\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, lub $\{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$, $\{1, 2, 3, \ldots\}$, $\{1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$,
- **intensjonalnie**, tzn. poprzez zdefiniowanie własności elementów, najczęściej z pewnego uniwersum (tzn. zadanie dziedziny i warunku), np. $\{n \in N : 2|n\}$,
- **rekurencyjnie**, tzn. poprzez zdefiniowanie pewnego elementu (elementów) bazowego i reguły produkcji, np. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_i = x_{i-1} + x_{i-2}$ dla $i \geq 3$,
- za pomocą operacji algebry zbiorów (zadawanie wtórne),
- za pomocą operacji logicznych (zadawanie wtórne),
- domyślnie.

Operacje algebry zbiorów

Dwa zbiory X i Y są równe $X = Y$, wtw. gdy każdy element X należy do Y i na odwrót. Zbiór X jest podzbiorem (właściwym) zbioru Y wtw. każdy element X należy do zbioru Y, co notujemy $X \subseteq Y (X \subset Y$ gdy $X \neq Y)$.
Suma zbiorów: $X \cup Y = \{x : x \in X \vee x \in Y\}$,
Iloczyn (przecięcie zbiorów: $X \cap Y = \{x : x \in X \wedge x \in Y\}$,
Różnica zbiorów: $X \setminus Y = \{x : x \in X \wedge \neg x \in Y\}$,
Dopełnienie zbioru X (do uniwersum U): $\overline{X} = U \setminus X$.
Zbiór pusty oznaczamy przez $\emptyset$. Zbiór wszystkich podzbiorów U przez 2^U.

Relacje

Pojęcie relacji

Pojęcie realacji jest stosowane zarówno w języku potocznym jak i w naukach ścisłych. Intuicyjnie, *relacja* oznacza pewien związek zachodzący pomiędzy dwoma lub więcej elementami, inaczej – pewną własność spełnianą przez te elementy. Przykładami tak rozumianej relacji mogą być szeroko pojmowane związki rodzinne (relacje rodzinne, relacje pokrewieństwa), zależności służbowe (relacje przełożony – podwładny), stosunki pomiędzy państwami (relacje międzypaństwowe), itp. Relacje takie określane są poprzez nazwę kryjącą pewne znaczenie, określającą rodzaj związku, a odnoszoną do elementów spełniających tą relację (najczęściej dwóch).

Przykłady relacji rozumianej jako związek lub własność zawarte są np. w następujących stwierdzeniach:

Jest pięknie.

Adam *ma brata.*

Jan *jest bratem* Adama.

Jan *jest średnim bratem* Adama i Karola.

Powyższe własności stanowią przykłady relacji zero-, jedno-, dwu- oraz trzyargumentowych; nazwę realacji wyróżniono kursywą, imiona braci stanowią argumenty relacji. Tak rozumiane relacje można definiować na dwa podstawowe sposoby: *ekstensjonalnie*, tzn. poprzez wyliczenie wszystkich krotek (k-elementowych ciągów) tworzących tą relację oraz *intensjonalnie*, tzn. poprzez podanie warunku który muszą spełniać elementy relacji, zazwyczaj podając równocześnie uniwersum.

W istocie, relacja może mieć dowolną całkowitą, nieujemną liczbę argumentów. Relacjami najczęściej rozważanymi w matematyce są relacje dwuargumentowe (dwuczłonowe) stanowiące klasę relacji dla których zedifiniowano szereg istotnych własności i znajdujących szerokie zastosowanie.

Relacje dwuargumentowe

Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów

Definicja 2 *Iloczynem kartezjańskim $X \times Y$ (dowolonych) zbiorów X oraz Y nazywamy zbiór wszystkich par postaci (x, y), takich, że $x \in X$ i $y \in Y$; formalnie*

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \ \wedge \ y \in Y\}. \tag{1}$$

Liczba elementów iloczynu kartezjańskiego wynosi $||X|| \cdot ||Y||$.

Przykład
Niech $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ a $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Iloczyn kartezjański $X \times Y = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_1), (x_4, y_2), (x_4, y_3)\}$ ma 12 elementów.

Praktyczne znaczenie iloczynu kartezjaśkiego: zawiera on *wszystkie* możliwe połączenia elemntów pierwszego zbioru z elementami drugiego zbioru.

Definicja relacji dwuargumentowej

Poniżej przedstawiono definicję pojęcia *relacji dwuargumentowej*. Relacja taka nazywana jest również *relacją binarną* lub *relacją dwuczłonową*.

Definicja 3 *Niech X oraz Y będą dowolnymi zbiorami. Relacją binarną nazywamy każdy zbiór R będący podzbiorem iloczynu kartezjańskiego tych zbiorów*

$$R \subseteq X \times Y. \tag{2}$$

Skończone relacje binarne wygodnie jest przedstawiać w postaci tablic dwuwymiarowych (macierzy), grafów lub tablic dwukolumnowych.

Definicja 4 *Relacją odwrotną do relacji $R \subseteq X \times Y$ nazywamy relację $R^{-1} \subseteq Y \times X$, $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$.*

Relacje dwuargumentowe

Struktura, definiowanie, notacja

Relacja dwuargumentowa jest *zbiorem* par elementów, takich, że pierwszy element należy do zbioru X a drugi do zbioru Y. Elementy relacji posiadają zatem pewną strukturę – w przypadku relacji binarnej są *ciągami* o długości 2. Powyższa definicja ma charakter *ekstensjonalny*. Iloczyn kartezjański $X \times Y$ tworzy pewne uniwersum. Relację R można też zadać *intensjonalnie* (w tym uniwersum) poprzez zdefiniowanie *funkcji charakterystycznej* relacji lub *formuły logicznej* definiującej własność elementów relacji. Stosowana notacja:

- $(x, y) \in R$ (para (x, y) należy do relacji R),
- xRy (x spełnia relację R z y; tzw. notacja infiksowa),
- $R(x, y)$ (zachodzi relacja R od x, y; tzw. notacja prefiksowa).

Dziedzina i przeciwdziedzina relacji

Definicja 5 *Zbiór*

$$D(R) = \{x : \exists y\ (x, y) \in R\}$$

nazywany jest dziedziną relacji R, a zbiór

$$D'(R) = \{y : \exists x\ (x, y) \in R\}$$

nazywany jest przeciwdziedziną relacji R.

Dla dowolnej relacji $R \subseteq X \times Y$ zachodzi własność $R \subseteq D(R) \times D'(R)$ oraz $D(R) \subseteq X$ i $D'(R) \subseteq Y$. Jeżeli zatem zbiory X oraz Y nie są zadane jawnie, to można przyjąć, że uniwersum dla relacji R (zadawanej intensjonalnie) stanowi zbiór $D(R) \times D'(R)$. Ma to istotne znaczenie praktyczne, np. dla zapewnienia możliwości konstruktywnego wyznaczenia dopełnienia relacji.

Projekcja i rozszerzenie cylindryczne

Ze względu na strukturę elementów (w postaci par) dla relacji definiuje się pewne specyficzne operacje wykraczające poza klasyczną algebrę zbiorów.

Definicja 6 *Niech $R \subseteq X \times Y$ będzie dowolną relacją. Rzutem (projekcją) relacji $\pi_X(R)$ na zbiór X (analogicznie $\pi_Y(R)$ na zbiór Y) nazywamy zbiór*

$$\pi_X(R) = \{x : \exists y\ (x, y) \in R\}$$

oraz analogicznie

$$\pi_Y(R) = \{y : \exists x\ (x, y) \in R\}.$$

Łatwo zauważyć, że w przypadku relacji dwuargumentowej $\pi_X(R) = D(R)$, a $\pi_Y(R) = D'(R)$. Zamiast $\pi_X(R)$ można też pisać $\pi_1(R)$ (rzut na pierwszą składową), a zamiast $\pi_Y(R)$ można pisać $\pi_2(R)$ (rzut na drugą składową). Operacja projekcji na wybraną składową pozwala uzyskać specyfikację zbioru elementów wchodzących w relację związanych z tą składową; powoduje ona utratę informacji o powiązaniach z elementami drugiego zbioru; nie jest zatem operacją odwracalną. Można jednak zdefiniować pewną operację pozwalającą uzyskać pokrycie *wszystkich* możliwych relacji, które mogłyby po projekcji na daną składową dać wynik identyczny z otrzymanym.

Definicja 7 *Niech $R \subseteq X \times Y$ będzie dowolną relacją, $\pi_X(R)$ jej rzutem (projekcją) na zbiór X, a $\pi_Y(R)$ rzutem na zbiór Y.* Rozszerzeniem cylindrycznym *rzutu $\pi_X(R)$ (odpowiednio rzutu $\pi_Y(R)$) relacji R nazywamy relację $\rho(\pi_X(R))$ (odpowiednio $\rho(\pi_Y(R))$) określoną jako*

$$\rho(\pi_X(R)) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in \pi_X(R)\}$$

oraz odpowiednio

$$\rho(\pi_Y(R)) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \pi_Y(R)\}$$

tzn. rozszerzenie cylindryczne jest największą *relacją zdefiniowaną w $X \times Y$, która w wyniku projekcji na pierwszą składową daje $\pi_X(R)$ (odpowiednio, na drugą składową daje $\pi_Y(R)$).*

Można zauważyć, że $\rho(\pi_X(R)) = \pi_X(R) \times Y$ oraz $\rho(\pi_Y(R)) = X \times \pi_Y(R)$.

Obcięcie, dopełnienie i domknięcie

Definicja 8 *Niech R będzie dowolną relacją a U oraz V pewnymi zbiorami. Lewostronnym obcięciem relacji R do zbioru U nazywamy zbiór*

$$U|R = \{(x, y) : (x, y) \in R \wedge x \in U\}.$$

Prawostronnym obcięciem relacji R do zbioru V nazywamy zbiór

$$R|V = \{(x, y) : (x, y) \in R \wedge y \in V\}.$$

Obustronnym obcięciem relacji R do pary zbiorów U oraz V nazywamy zbiór

$$U|R|V = \{(x, y) : (x, y) \in R \wedge x \in U \wedge y \in V\}.$$

Operacje obcięcia pełnią rolę „filtrów" – poprzez odpowiedni dobór zbiorów U oraz V z relacji R można otrzymać pewien interesujący nas podzbiór.

Definicja 9 *Niech $R \subseteq X \times Y$ będzie dowolną relacją. Dopełnieniem relacji R nazywamy relację $\overline{R} = (X \times Y) \setminus R$.*

Dopełnienie relacji stanowi jej uzupełnienie do pełnego iloczynu kartezjańskiego. Jeżeli X, Y nie są zadane jawnie, to dpełnienie można zdefiniować jako $\overline{R} = (D(R) \times D'(R)) \setminus R$.

Często celowe jest uzupełnienie zadanej reacji o pewne elementy, tak aby uzyskać pożądane jej własności, takie jak *symetrię* lub *przechodniość*.

Definicja 10 *Niech $R \subseteq X \times X$ będzie dowolną relacją. Domknięciem symetrycznym relacji R nazywamy relację $R^S = R \cup \{(y, x) : (x, y) \in R\}$.*

Definicja 11 *Niech $R \subseteq X \times X$ będzie relacją. Domknięciem przechodnim relacji R nazywamy relację R^* będącą najmniejszym zbiorem takim, że:*

- *$R \subseteq R^*$,*
- *jeżeli $(x, y) \in R^*$ oraz $(y, z) \in R^*)$ to także $(x, z) \in R^*$.*

Powyższa definicja ma charakter rekurencyjny. Domknięcie tranzytywne relacji otrzymuje się jako *punkt stały* operacji dołączania) par spełniających warunki defincji.

Obraz zbioru i złożenie relacji

Relacja dwuargumentowa może być traktowana jako pewnego rodzaju przyporządkowanie – elementom dziedziny przypisane są elementy przeciwdziedziny; zatem relacja może posłużyć do konstrukcji zbioru elementów przypisanych pewnemu podzbiorowi jej dziedziny.

Definicja 12 *Niech R będzie dowolną relacją, a U pewnym zbiorem. Obrazem zbioru U poprzez relację R nazywamy zbiór*

$$R * U = \{y : \exists x \in U \ \ (x, y) \in R\}.$$

Zamiast $R * U$ stosowany również bywa zapis $R(U)$. Obrazem dziedziny relacji poprzez tą relację jest jej przeciwdziedzina. Analogicznie definiuje się przeciwobraz zbioru V poprzez relację R.

Ponieważ relacje mogą być interpretowane jako odwzorowania, można zdefiniować złożenie relacji które odpowiada pojęciu złożenia odwzorowań.

Definicja 13 *Niech $R \subseteq X \times Y$ oraz $S \subseteq U \times V$ będą dowolnymi relacjami. Złożeniem relacji R oraz S nazywamy relację*

$$S \circ R = \{(x, v) : \exists y \in Y \cap U \ \ (x, y) \in R \wedge (y, v) \in S\}.$$

Potęga relacji: $R^1 = R$, $R^{n+1} = R^n \circ R$. Złożenie relacji zawsze istnieje; może ono być zbiorem pustym (jeżeli $Y \cap U = \emptyset$). Złożenie relacji jest łączne, ale nie jest przemienne. Operacja składania relacji pozwala łączyć informację zawartą w dwóch relacjach poprzez utworzenie (wychwycenie) związku pomiędzy elementami skrajnymi relacji R i S przez wspólny element wewnętrzny y. Złożenie relacji skończonych można otrzymać poprzez *zestawienie* elementów relacji R i S, każdy z każdym, przy czym dla każdej pary elementów tych relacji mających zgodny element łączący y tworzony jest element relacji wynikowej; pary elementów relacji nie dające się połączyć należy pominąć.
Przykład Rozważmy relację $R = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, d), (c, d)\}$ oraz relację $S = \{(b, a), (b, e), (c, f)\}$. Złożeniem relacji R oraz S jest relacja $S \circ R = \{(a, a), (a, e), (a, f), \}$.

Własności relacji dwuargumentowych

Relacje dwuargumentowe mogą posiadać szereg interesujących własności nadających im pewnego rodzaju *regularność*. Będziemy rozważać relacje określone w pewnym zbiorze X (typu $R \subseteq X \times X$).

Definicja 14 *Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy zwrotną jeżeli spełnia ona następujący warunek*

$$\forall x \in X \ \ (x, x) \in R \tag{3}$$

Definicja 15 *Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy przeciwzwrotną jeżeli spełnia ona następujący warunek*

$$\forall x \in X \ \ (x, x) \notin R \tag{4}$$

Definicja 16 *Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy symetryczną jeżeli spełnia ona następujący warunek*

$$\forall x, y \in X \ \ (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \tag{5}$$

Definicja 17 *Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy asymetryczną lub przeciwsymetryczną jeżeli spełnia ona następujący warunek*

$$\forall x, y \in X \ \ (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R \tag{6}$$

Definicja 18 *Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy antysymetryczną jeżeli spełnia ona następujący warunek*

$$\forall x, y \in X \ \ (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y \tag{7}$$

Definicja 19 *Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy przechodnią lub tranzytywną jeżeli spełnia ona następujący warunek*

$$\forall x, y, z \in X \ \ (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \tag{8}$$

Definicja 20 *Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy spójną jeżeli spełnia ona następujący warunek*

$$\forall x, y \in X \ \ (x, y) \in R \vee (y, x) \in R \tag{9}$$

Relacje równoważności i klasy równoważności

Definicja 21 *Relację, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia nazywamy relacją równoważnościową lub równoważnością.*

Definicja 22 *Niech R będzie dowolną relacją równoważnościową określoną w zbiorze X. Klasą abstrakcji (klasą równoważności) elementu x względem relacji R nazywamy zbiór $[x]_R = \{y : (x, y) \in R\}$.*

Relacja równoważnościowa dzieli zbiór w którym jest określona na tzw. *klasy abstrakcji* lub klasy *równoważnośći* elementów tego zbioru względem tej relacji.

Definicja 23 *Niech R będzie dowolną relacją równoważnościową określoną w zbiorze X. Klasą abstrakcji (klasą równoważności) elementu x względem relacji R nazywamy zbiór $[x]_R = \{y : (x, y) \in R\}$.*

Twierdzenie 1 *Niech R będzie dowolną relacją równoważnościową określoną w niepustym zbiorze X. Relacja R dzieli zbiór X na klasy równoważności (wyznacza te klasy), przy czym spełnione są następujące warunki:*

- $\forall x \in X \;\; [x]_R \neq \emptyset$ *(klasy równoważności są niepustymi podzbiorami X),*
- $\forall x, y \in X \;\; x \neq y \Rightarrow [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ *(klasy równoważności są rozłącznymi podzbiorami X),*
- $\bigcup_{x \in X} [x]_R = X$ *(suma wszystkich klas równoważności daje cały zbiór X).*

Mówimy wówczas, że relacja R wyznacza podział (rozkład) zbioru X na klasy równoważności $[x]_R$.

Ustanowienie relacji równoważności prowadzi do abstrakcji poprzez utożsamienie pewnych elementów; korzyścią takiej abstrakcji jest ograniczenie liczby rozpatrywanych elementów (redukcja rozmiarów zbioru).

Relacje częściowego porządku

Definicja 24 *Relację R określoną w zbiorze X, która jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia nazywamy relacją częściowego porządku w tym zbiorze.*

Relacja częściowego porządku pozwala porównywać elementy zbioru i szeregować je według pewnego kryterium; nie wszystkie elementy zbioru muszą być porównywalne.

Przykładami relacji częściowego porządku są relacje zawierania się zbiorów, wynikania logicznego (logicznej konsekwencji) wśród formuł, itp. Relację częściowego porządku oznacza się często symbolem „$\leq$".

Jeżeli w zbiorze X określono relację częściowego porządku R, to parę (X, R) nazywamy *zbiorem częściowo uporządkowanym* (pisze się $(X, \leq)$). Jeżeli para $(x, y) \in R$ to powiemy, że x poprzedza y ($x \leq y$).

Element $x \in X$ nazywamy *minimalnym*, gdy nie jest on poprzedzany przez żaden inny element zbioru X. Element $x \in X$ nazywamy *maksymalnym*, gdy nie poprzedza on żadengo inego elementu zbioru X. Zauważmy, że w danym zbiorze częściowo uporządkowanym może być wiele elementów minimalnych (nieporównywalnych ze sobą) oraz wiele elementów maksymalnych (także nieporównywalnych ze sobą).

Jeżeli pewien element poprzedza każdy element rozważanego zbioru, to jest on nazywany *elementem najmniejszym*. Jeżeli każdy element rozważanego zbioru poprzedza pewien wybrany element tego zbioru, to jest on nazywany *elementem największym*. W zbiorze częściowo uporządkowanym (skończonym) element najmniejszy i największy mogą nie istnieć (np. gdy jest wiele elementów minimalnych bądź maksymalnych).

Przykłady relacji $\leq$: zawieranie się zbiorów ($\subseteq$), konsekwencja logiczna ($\models$), uporządkowanie hierarchiczne (drzewo), uporządkowanie ciągów, wektorów, krotek.

Relacja porządku

Definicja 25 *Relację R określoną w zbiorze X, która jest relacją częściowego porządku (jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia) oraz dodatkowo jest spójna nazywamy relacją porządku w tym zbiorze.*

Relację częściowego porządku nazywa się także relacją porządku; wówczas relacja porządku określana jest jako porządek liniowy.

Relacja porządku w danym zbiorze pozwala na porównywanie dowolnych elementów tego zbioru i ustalenie który z nich poprzedza drugi element. W skończonym zbiorze uporządkowanym istnieje zawsze element najmniejszy oraz element największy.

Definicja 26 *Niech $(X, \leq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, $X \subseteq U$. Element $u \in U$ nazywany jest ograniczeniem dolnym zbioru X, jeżeli dla każdego $x \in X$ zachodzi $u \leq x$. Element $u \in U$ nazywany jest ograniczeniem górnym zbioru X, jeżeli dla każdego $x \in X$ zachodzi $x \leq u$.*

W danym zbiorze może nie istnieć żaden element minimalny lub maksymalny. Pojęcia ograniczenia dolnego i ograniczenia górnego pozwalają „szacować" od dołu i od góry elementy tego zbioru. Wśród wszystkich ograniczeń dolnych (górnych) celowe jest wyodrębnienie tego największego (najmniejszego), o ile oczywiście, ono istnieje.

Definicja 27 *Niech $(X, \leq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, $X \subseteq U$. Największe ograniczenie dolne $i \in U$ nazywane jest kresem dolnym zbioru X (infimum). Najmniejsze ograniczenie górne $s \in U$ nazywane jest kresem górnym zbioru X (supremum).*

Jeżeli w danym zbiorze X istnieje element najmniejszy (największy), to jest on także ograniczeniem dolnym (górnym) tego zbioru. Jeżeli kres dolny (górny) istnieje, to jest on określony jednoznacznie. Kres dolny zbioru X oznacza się poprzez $\inf X$, a kres górny – poprzez $\sup X$.

Elementy teorii krat

Pojęcie kraty stanowi rowinięcie pojęcia zbioru częściowo uporządkowanego $(X, \leq)$. W kratach istnieje nie tylko możliwość porównywania niektórych elementów i ew. ich szeregowania, a także wyszukiwania elementów minimalnych i maksymalnych, ale także prowadzenia pewnych *operacji* na elementach, w szczególności operacji *sumy* i *iloczynu*.

Definicja 28 *Niech $(X, \leq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Jeżeli dla dowolnych dwóch elementów $x, y \in X$ istnieje kres dolny oraz kres górny, to taki zbiór nazywamy kratą. W zbiorze X definiuje się działania sumy jako $x \vee y = \sup\{x, y\}$ oraz iloczynu jako $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.*

Przykłady krat: zbiór wszystkich podzbiorów pewnego zbioru X wraz z relacją (słabego) zawierania się zbiorów (z działaniami sumu i iloczynu zbiorów), algebra Bool'a, zbiór krotek zoperacjami *min* oraz *max*, typy, itp. Każdy zbiór (liniowo) uporządkowany jest kratą (z działaniami maksimum i minimum). Nie wszystkie elementy kraty można bezpośrednio porównać; zawsze jednak można dla nich określić kres górny i kres dolny.

Kraty można przedstawiać za pomocą grafu skierowanego. Węzły odpowiadają elementom zbioru, a łuki relacji częściowego porządku. Dla każdych dwóch węzłów istnieją ścieżki zgodne ze skierowaniem grafu i łączące się w dokładnie jednym węźle, oraz ścieżki przeciwne do skierowania grafu i łączące się w dokładnie jednym węźle.

Kratę nazywamy *zupełną*, jeżeli każdy podzbiór $X' \subseteq X$ ma kres dolny i kres górny. W dowolnej kracie każdy niepusty i skończony podzbiór ma kres górny i kres dolny. Każda krata skończona jest zupełna. Krata zupełna ma kres górny i kres dolny. Kres górny przyjęto oznaczać jako $\top$ a kres dolny jako $\perp$. Jeżeli krata jest skończona, to elementy $\top$ oraz $\perp$ należą do tej kraty.

Struktura kraty stawia słabsze wymagania niż struktura zbioru (liniowo) uporządkowanego, a jednocześnie pozwala w sposób konstruktywny realizować operacje supremum (sumy, alternatywy, max) lub infimum (iloczynu, koniunkcji, min). Przykładem operacji sumy jest alternatywa logiczna. Przykładem operacji iloczynu jest koniunkcja logiczna.

Relacje wieloargumentowe

Definicja 29 *Iloczynem kartezjańskim (n zbiorów)* $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ *zbiorów* $X_1, X_2, \ldots X_n$ *nazywamy zbiór wszystkich n-elementowych ciągów postaci* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, takich że* $x_1 \in X_1$*,* $x_2 \in X_2$*, ...* $x_n \in X_n$*; formalnie*

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\}.$$

Iloczyn kartezjański postaci $X \times X \times \ldots \times X$ (n razy) nazywany jest *n-tą potęgą kartezjańską* zbioru X i oznaczany jako X^n. Jeżeli zbiory $X_1, X_2, \ldots X_n$ są skończone, liczba elementów zbioru X_i jest równa m_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, to liczba elementów iloczynu kartezjańskiego $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ wynosi $\prod_{i=1}^{n} m_i$.

Definicja 30 *Niech* $X_1, X_2, \ldots X_n$ *będą dowolnymi zbiorami. Każdy zbiór* R *będący podzbiorem iloczynu kartezjańskiego tych zbiorów, tj. taki, że*

$$R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \tag{10}$$

nazywamy relacją n-argumentową.

Relacja n-argumentowa jest *zbiorem* ciągów n-elementowych. Ich struktura jest ustalona dla danej relacji – wszystkie ciągi będące jej elementami muszą mieć tą samą długość. Ciągi te nazywane są *krotkami* lub *n-krotkami*. Na relacjach n-argumentowych można wykonywać działania takie jak suma zbiorów, przecięcie (iloczyn zwykły), różnica zbiorów, dopełnienie, itp. Dla relacji obowiązują również pojęcia równości, zawierania, itp. Odpowiednio rozszerza się też definicje projekcji, rozszerzenia cylindrycznego, obcięcia, dopełnienia, obrazu zbioru i złożenia.

Iloczyn kartezjański $U = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ tworzy pewne uniwersum. Relację R określoną w tym uniwersum można zadać ekstensjonalnie lub intensjonalnie, poprzez określenie pewnego warunku, który spełniają elementy należących do niej par. Warunek taki, mający zazwyczaj postać logiczną, stanowi funkcję charakterystyczną relacji. Tak więc relacja może być do pewnego stopnia utożsamiana z pewną funkcją logiczną – predykatem; tym razem będzie to predykat o n argumentach.

Relacje n-argumentowe

Dla zapisania faktu, że pewne elementy $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ oraz $x_n \in X_n$ tworzą ciąg należący do relacji R (jej krotkę), stosowane mogą być następujące zapisy:

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$ (ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$) należy do relacji R),
- $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (zachodzi relacja R od $x_1, x_2, \ldots, x_n$; tzw. notacja prefiksowa).

Powyższe notacje są równoważne; notacja infiksowa nie jest stosowana w przypadku relacji n-argumentowych. Powyższe notacje są równoważne.

Ponieważ przy definiowaniu relacji R zbiory $X_1, X_2, \ldots X_n$ nie zawsze muszą być zadane jawnie, można zdefiniować *dziedzinę* relacji n-argumentowej ze względu na i-ty argument, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definicja 31 *Zbiór*

$$D_i(R) = \{x_i : \exists x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \ \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R\}$$

nazywany jest dziedziną relacji R ze względu na i-ty jej argument.

Dla dowolnej relacji n-argumentowej R zachodzi własność $R \subseteq D_1(R) \times D_2(R) \times \ldots \times D_n(R)$ oraz $D_i(R) \subseteq X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Jeżeli zbiory $X_1, X_2, \ldots X_n$ nie są zadane jawnie, można przyjąć, że uniwersum relacji R stanowi zbiór $D_1(R) \times D_2(R) \times \ldots \times D_n(R)$. Ma to istotne znaczenie praktyczne, np. dla zapewnienia możliwości konstruktywnego wyznaczenia dopełnienia relacji; jest ono wówczas określone jako $\overline{R}$, gdzie:

$$\overline{R} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n : \ \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin R\}.$$

Intensjonalnie, jeżeli relacja R jest określona w pewnym uniwersum za pomocą warunku logicznego, to dopełnienie tej relacji (w tym uniwersum) mozna określić poprzez negację tego warunku.

Zbiory z powtórzeniami

Zbiory z powtórzeniami to zbiory w których identyczne elementy mogą występować wielokrotnie; inne stosowane nazwy to *multizbiory* lub *wielozbiory*.

Definicja 32 *Zbiorem z powtórzeniami M określonym nad pewnym zbiorem U nazywamy dowolny zbiór par $\{(r_M(u), u) : u \in U, r_M(u) \in N \cup \{0\}\}$, gdzie r_M jest funkcją typu $r_M : U \longrightarrow N \cup \{0\}$.*

Wielozbiory zapisywane są w postaci $M = \sum r_M(u) * u$ lub jako zbiory par postaci $M = \{(r_M(u_1), u_1), (r_M(u_2), u_2), \ldots, (r_M(u_k), u_k)\}$ (dla $r_M(u) \neq 0$). Liczbę $r_M(u)$ nazywa się *krotnością* elementu u w wielozbiorze M lub *współczynnikiem repetycji.*

Suma zbiorów (teoriomnogościowa):

$$M_1 \cup M_2 = \sum_{u \in U} max(r_{M_1}(u), r_{M_2}(u)) * u$$

Przecięcie (iloczyn teoriomnogościowy):

$$M_1 \cap M_2 = \sum_{u \in U} \min(r_{M_1}(u), r_{M_2}(u)) * u$$

Różnica zbiorów:

$$M_1 \setminus M_2 = \sum_{u \in U} max((r_{M_1}(u) - r_{M_2}(u)), 0) * u$$

Dodawanie (suma arytmetyczna):

$$M_1 + M_2 = \sum_{u \in U} (r_{M_1}(u) + r_{M_2}(u)) * u$$

M**nożenie skalarne**:

$$k \cdot M = \sum_{u \in U} (k \cdot r_M(u)) * u$$

Zawieranie:

$$M_1 \subseteq M_2 \ \ wtw. \ \ \forall u \in U \ \ r_{M_1}(u) \leq r_{M_2}(u)$$

Równość:

$$M_1 = M_2 \ \ wtw. \ \ \forall u \in U \ \ r_{M_1}(u) = r_{M_2}(u).$$