# Elementy logiki dla informatyków

**Wykład II**

# Elementy logiki.
# Rachunek zdań

# Wprowadzenie do logiki

## Przedmiot logiki

Przedmiotem logiki matematycznej są następujące zagadnienia:

- formalna, symboliczna reprezentacja wiedzy; wiedza wyrażana w języku naturalnym jest zapisywana w postaci *formuł logicznych*,
- przetwarzanie wiedzy za pomocą reguł stanowiących schematy wnioskowania; w tym celu formułowane są *reguły wnioskowania*,
- badanie własności generowanych wniosków i systemów logicznych; własności te obejmuja m. in. *poprawność* i *zupełność*.

Klasyczna logika formalna bada mechanizmy rozumowań niezawodnych, w których otrzymywane wnioski są zawsze prawdziwe, o ile wychodzi się z prawdziwych przesłanek, a więc *wnioskowania dedukcyjnego*. Czasem dopuszcza się również inne schematy wnioskowania, prowadzące do użytecznych, chociaż nie zawsze prawdziwych wniosków (np. *abdukcja* oraz *indukcja*).

Alfabet rachunku zdań tworzą symbole formuł zdaniowych, łaczących je spójników (funkcji) logicznych oraz stosowane dla uporządkowania notacji nawiasy. Formuły zdaniowe symbolizują konkretne zdania; zdania te mogą być dobrze określone i wówczas można im przypisać ocenę *prawdy* albo *fałszu* lub też symbolizować pewne nieskonkretyzowane w danej chwili wypowiedzi.

W pierszym przypadku, takie skończone wypowiedzi, którym można jednoznacznie przypisać ocenę *prawdy* albo *fałszu*, nazywane będą *zdaniami*. Mogą one być zapisywane jawnie, np. "Śnieg jest biały", "W nocy jest ciemno", "Pada deszcz", itp. lub też przy użyciu pewnych symboli, np. $p$ czy $q$. W drugim przypadku, formuła zdaniowa symbolizuje pewną bliżej nie sprecyzowaną wypowiedź, jednakże taką, której wartość logiczna może przyjąć wartość prawdy albo fałszu. W taki przpadku formuła zdaniowa nazywana jest *zmienną zdaniową*.

# Wprowadzenie do logiki

## Istota wnioskowania logicznego

Chcąc przpisać konkretne znaczenie pewnej zmiennej zdaniowej można zastosować notację postaci

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \text{“W nocy jest ciemno”},$$

co oznacza, że $p$ staje się skrótowym zapisem podanego zdania. Ponadto, bardzo często rozważa się symbole formuł zdaniowych nie przypisując im konkretnego znaczenia, a jedynie wartość prawdy lub fałszu. Takie przypisanie nosi nazwę określenia lub nadania *interpretacji* formule zdaniowej (zmiennej zdaniowej).

Aby móc prowadzić wnioskowanie logiczne potrzebny jest zbiór formuł definiujących pewną wiedzę oraz reguły dla ich przetwarzania. Reguły przetwarzania wiedzy zazwyczaj formułowane są w postaci schematu:

$$\frac{\text{przesłanki reguły}}{\text{konkluzje}}.$$

Przykładem reguły wnioskowania jest popularna reguła *modus ponens* o następującym schemacie:

$$\frac{\alpha, \alpha \Longrightarrow \beta}{\beta}.$$

Na przykład, dysponując przesłankami $\alpha =$ *pada deszcz* oraz $\beta =$ *jeżeli pada deszcz to ulice są mokre* (logicznie: pada deszcz $\Longrightarrow$ ulice są mokre) możemy skorzystać z reguły *modeus ponens* wnioskując wg schematu:

$$\frac{\text{pada deszcz, pada deszcz} \Longrightarrow \text{ulice są mokre}}{\text{ulice są mokre}}.$$

Otrzymujemy zatem konkluzję, że *ulice sa mokre*, która stanowi nowo wydedukowany fakt.

# Wprowadzenie do logiki

## Spójniki i formuły logiczne

Z formuł atomowych bardziej złożone formuły budowane są przy pomocy odpowiednich *spójników logicznych*. Najczęściej stosowane są następujące spójniki logiczne:

- $\neg$ – negacja,
- $\wedge$ – koninkcja,
- $\vee$ – alternatywa,
- $\Rightarrow$ – implikacja (może być również postaci $\Leftarrow$),
- $\Leftrightarrow$ – równoważność (implikacja dwustronna).

Przy wykorzystaniu powyższych spójników logicznych i symboli formuł zdaniowych (formuł atomowych) buduje się bardziej złożone formuły logiczne rachunku zdań. Nie wszystkie jednak możliwe do utworzenia napisy będą formułami. Poniżej podano definicję poprawnie skonstruowaych formuł.

**Definicja 1 Formuły rachunku zdań** *Niech* $\mathbf{P}$ *będzie zbiorem symboli formuł atomicznych. Zbiór poprawych formuł rachunku zdań (krótko: formuł)* $\mathbf{FOR}$*jest zdefiniowane rekurencyjnie jak następuje:*

1. *Jeżeli* $p \in \mathbf{P}$ *to* $p \in \mathbf{FOR}$*,*
2. *Jeżeli* $\phi \in \mathbf{FOR}$ *to* $(\neg\phi) \in \mathbf{FOR}$*,*
3. *Jeżeli* $\phi, \psi \in \mathbf{FOR}$ *to* $(\psi \wedge \phi) \in \mathbf{FOR}$*,* $(\psi \vee \phi) \in \mathbf{FOR}$*,* $(\psi \Rightarrow \phi) \in \mathbf{FOR}$ *oraz* $(\psi \Leftrightarrow \phi) \in \mathbf{FOR}$*,*
4. *Wszystkie formuły muszą być generowane zgodnie z powyższymi regułami.*

# Wprowadzenie do logiki

## Semantyka rachunku zdań

Formułom atomicznym i złożonym przypisywana jest ocena prawdy lub fałszu. Aktualna ocena formuły zależy od przypisania wartości logicznych występującym w niej formułom atomowym oraz od konstrukcji samej formuły. Poniżej wprowadzono ważne pojęcie *interpretacji* formuł atomowych w rachunku zdań.

**Definicja 2** *Niech* $\mathbf{P}$ *będzie zbiorem rozważanych symboli formuł atomowych a* $\mathbf{T}$ *wyróżnionym zbiorem wartości logicznych, tj.* $\mathbf{T} = \{true, false\}$. *Interpretacja symboli zbioru* $\mathbf{P}$ *nazywa się każdą funkcję postaci:*

$$I : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{T}$$

*przyporządkowującą każdemu symbolowi formuły atomowej wartość logiczną prawdy albo fałszu.*

Interpretacja określa zatem czy dana formuła atomowa jest uznawana za prawdziwą czy też fałszywą. Przy danej interpretacji formuła może być prawdziwa lub fałszywa; w przypadku gdy interpretacja nie przypisywałaby jednoznacznie wartości logicznej prawdy albo fałszu wszystkim symbolom rozważanego zbioru, interpretację taką okresla się jako niepełną lub częściową.

**Definicja 3** *Dwie formuły* $\phi$ *oraz* $\psi$ *mające identyczną wartość logiczną przy każdej interpretacji* $I$ $(I(\phi) = I(\psi))$ *nazywamy* logicznie równoważnymi.

Pojęcie interpretacji należy rozszerzyć na zbiór wszystkich formuł **FOR**. Odpowiednia definicja ma charakter rekurencyjny.

# Wprowadzenie do logiki

## Semantyka – określanie wartości logicznej formuł

**Definicja 4** *Niech* **P** *oznacza zbiór rozważanych symboli formuł atomowych,* **T** *– dwuelementowy zbiór wartości logicznych, a $I$ – interpretację. Interpretacja $I$ przypisuje wartości logiczne wszystkim formu@lom $\phi$, $\psi$ ze zbioru* **FOR**, *tzn.:*

$$I: \mathbf{FOR} \longrightarrow \mathbf{T},$$

*utworzonym wyłącznie w oparciu o symbole występujące w* **P** *zgodnie z następującymi zasadami:*

1. *$I(\neg\phi) = true$ wtw. gdy $I(\phi) = false$ oraz $I(\neg\phi) = false$ wtw. gdy $I(\phi) = true$,*
2. *$I(\phi \wedge \psi) = true$ wtw. gdy $I(\phi) = true$ oraz $I(\psi) = true$; w pozostałych przypadkach $I(\phi \wedge \psi) = false$,*
3. *$I(\phi \vee \psi) = true$ wtw. gdy $I(\phi) = true$ lub $I(\psi) = true$; w pozosta@lym przypadku $I(\phi \vee \psi) = false$,*
4. *$I(\phi \Rightarrow \psi) = true$ wtw gdy $I(\phi) = false$ lub $I(\phi) = true$ oraz jednocześnie $I(\psi) = true$; w pozostałym przypadku $I(\phi \wedge \psi) = false$,*
5. *$I(\phi \Leftrightarrow \psi) = true$ wtw. gdy $I(\phi) = I(\psi)$; w pozostałych przypadkach $I(\phi \Leftrightarrow \psi) = false$.*

Powyższa definicja pozwala rekurencyjnie ustalić wartość logiczną dowolnie skonstruowanej i dowolnie zlożonej poprawnej formuły rachunku zdań o ile tylko znane są wartości logiczne wszystkich występujących w niej formuł atomowych.

# Wprowadzenie do logiki

## Tabele wartości logicznych

Zamiast symboli prawdy i fałszu czesto stosujemy zapis uproszczony: 1 zamiast prawdy i 0 zamiast fałszu. Tablica prawdy dla negacji przybiera postać:

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Tablica prawdy dla koninukcji przybiera postać:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Tablica prawdy dla dysjunkcji przybiera postać:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Tablica prawdy dla implikacji przybiera postać:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# Wprowadzenie do logiki

## Sematyka rachunku zdań

Często podana powyżej definicja przedstawiana jest w formie jest tabeli ilustrującej podane zależności logiczne (patrz poniżej).

| $\phi$ | $\psi$ | $\neg\phi$ | $\phi \wedge \psi$ | $\phi \vee \psi$ | $\phi \Rightarrow \psi$ | $\phi \Leftrightarrow \psi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *true* | *true* | *false* | *true* | *true* | *true* | *true* |
| *true* | *false* | *false* | *false* | *true* | *true* | *true* |
| *false* | *true* | *true* | *false* | *true* | *true* | *false* |
| *false* | *false* | *true* | *false* | *false* | *true* | *true* |

Semantykę wybranych funkcji można definiować za pomocą sprowadzenia jej do równoważnej formuły zawierajacej symbole koniunkcji, dysjunkcji i negacji.

- $\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$,
- $\phi \Leftrightarrow \psi \equiv (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\phi \Leftarrow \psi)$,
- $\phi|\psi \equiv \neg(\phi \wedge \psi)$ – funkcja (kreska) Sheffera, jest to tzw. funkcja `NAND`; inna notacja $\overline{\phi \wedge \psi}$,
- $\phi \downarrow \psi \equiv \neg(\phi \vee \psi)$ – funkcja (strzałka) Pierce'a, jest to tzw. funkcja `NOR`; inna notacja $\overline{\phi \vee \psi}$,
- $\phi \bigoplus \psi \equiv (\neg\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \neg\psi)$ – funkcja alternatywy wykluczającej, jest to tzw. funkcja `EX-OR`,
- $\neg\phi \vee \psi$ oraz $\phi \vee \neg\psi$ – funkcje zakazu lub różnice niesymetryczne.

Ogólnie dla $n$ argumentów wejściowych można skonstruować $2^{2^n}$ różnych funkcji, a więc dla $n = 2$ jest 16 różnych funkcji.

# Wprowadzenie do logiki

## Ważniejsze prawa logiczne

- $\neg\neg p \equiv p$ – prawo podwójnego przeczenia,
- $p \wedge q \equiv q \wedge p$ – prawo przemienności koninkcji,
- $p \vee q \equiv q \vee p$ – prawo przemienności alternatywy,
- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ – prawo łączności koninkcji,
- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ – prawo łączności koninkcji,
- $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ – prawo rozdzielności koninkcji względem alternatywy,
- $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ – prawo rozdzielności alternatywy względem koninkcji,
- $p \wedge p \equiv p$ – prawo idempotentności dla koninkcji,
- $p \vee p \equiv p$ – prawo idempotentności dla alternatywy,
- $p \wedge 0 \equiv 0$, $p \wedge 1 \equiv p$ – prawo identyczności,
- $p \vee 0 \equiv p$, $p \vee 1 \equiv 1$ – prawo identyczności,
- $p \vee \neg p \equiv 1$ – prawo wyłączonego środka,
- $p \wedge \neg p \equiv 0$ – prawo sprzeczności,
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg(p) \vee \neg(q)$ – prawo De Morgana,
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg(p) \wedge \neg(q)$ – prawo De Morgana,
- $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$ – prawo kontrapozycji,
- $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ – określenie implikacji za pomoca alternatywy.

# Postacie specjalne formuł logicznych

## Normalna postać koninktywna

Każda formuła logiczna rachunku zdań może być sprowadzona do postaci równoważnej, w której formuły atomiczne i ich negacje bedą połączone symbolem alternatywy, a tak utworzone formuły – symbolem koniunkcji; jest to tzw. *normalna postać koniuntywna, CNF* i przybiera następującą formę:

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots p_k) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \ldots q_l) \wedge \ldots (s_1 \vee s_2 \vee \ldots s_m).$$

## Normalna postać dysjunktywna

Każda formuła logiczna rachunku zdań może być sprowadzona do postaci równoważnej, w której formuły atomiczne i ich negacje bedą połączone symbolem koninkcji, a tak utworzone formuły – symbolem alternatywy; jest to tzw. *normalna postać dysjunktywna, DNF* i przybiera następującą formę:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots p_k) \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots q_l) \vee \ldots (s_1 \wedge s_2 \wedge \ldots s_m).$$

## Normalna postać prawdy/jedynki oraz fałszu/zera

Formuła zawsze prawdziwa zawierająca $n$ zmiennych zdaniowych może zostać przedstawiona w postaci DNF w jednoznaczny sposób i składa się ona z $2^n$ różnych koniunkcji, każda o $n$ składowych, np.:

$$1 = pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \qquad \text{(DNF)}$$

Formuła zawsze fałszywa zawierająca $n$ zmiennych zdaniowych może zostać przedstawiona w postaci CNF w jednoznaczny sposób i składa się ona z $2^n$ różnych dysjunkcji, każda o $n$ składowych, np.:

$$0 = pqr \wedge pq\bar{r} \wedge p\bar{q}r \wedge p\bar{q}\bar{r} \wedge \bar{p}qr \wedge \bar{p}q\bar{r} \wedge \bar{p}\bar{q}r \wedge \bar{p}\bar{q}\bar{r} \qquad \text{(CNF)}$$

# Związki pomiędzy zdaniami logicznymi

Zdanie proste

$$p \Rightarrow q$$

Zdanie odwrotne

$$q \Rightarrow p$$

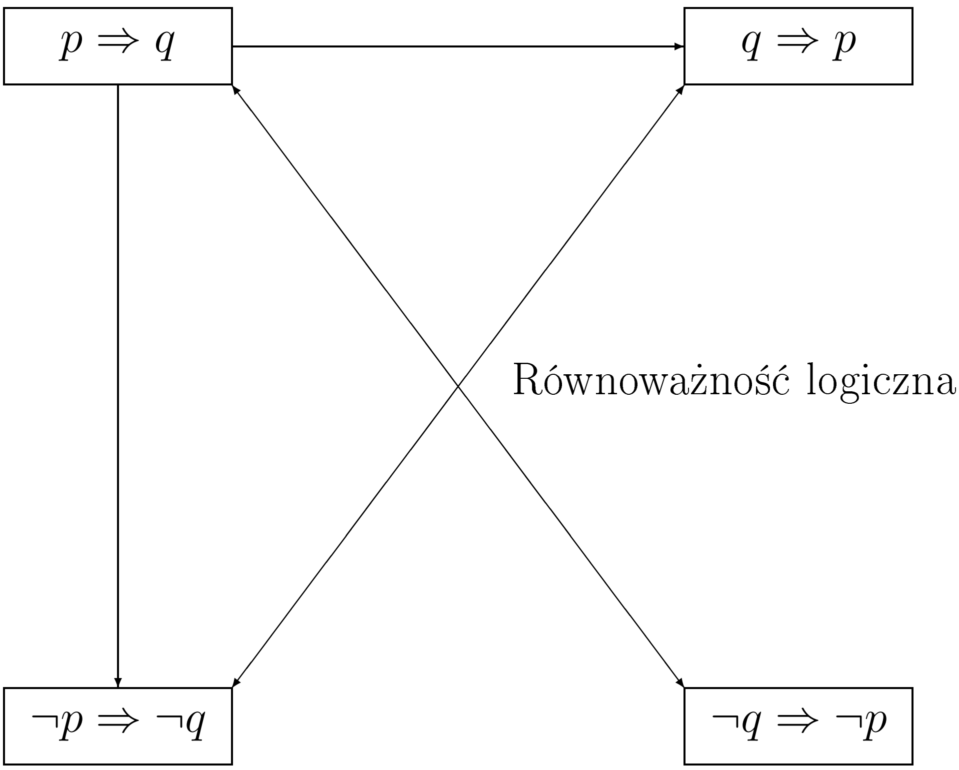
Zdanie przeciwne

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

Zdanie przeciwstawne

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

Kwadrat logiczny:



# Metoda zerojedynkowa

## Zastosowania metody zero-jedynkowej

Metoda zerojedynkowa polega na budowie i analizie **matrycy logicznej** formuły; może być stosowana do:

- weryfikacji tautologii (dla każdej interpretacji wartość logiczna formuły jest *true*,
- weryfikacji niespełnialności (dla każdej interpretacji wartość logiczna formuły jest *false*,
- badania równoważności formuł (dla każdej interpretacji wartości logiczne są takie same),
- weryfikacji logicznej konsekwencji (dla każdej interpretacji prawdziwość formuły musi pociągać prawdziwośc jej konsekwencji),
- wyznaczania interpretacji przy których formuła jest prawdziwa lub fałszywa.

Przykład. sprawdzimy, że formuła $\Phi$ jest tautologią.

$$\Phi = ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$$

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \Rightarrow r$ | $q \Rightarrow r$ | $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ | $(p \vee q) \Rightarrow r$ | $\Phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | **1** | **1** | **1** |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** | **1** | **1** |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | **0** | **0** | **1** |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | **1** | **1** | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | **0** | **0** | **1** |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** | **1** | **1** |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | **0** | **0** | **1** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **1** | **1** | **1** |

# Wprowadzenie do logiki

## Przykład zastosowania metody zero-jedynkowej

Zbadamy prawdziwość implikacji logicznej postaci:

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)}{(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)}$$

| $p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $p \Rightarrow q$ | $r \Rightarrow s$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$ | $p \vee r$ | $q \vee s$ | $(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | **1** | 0 | 0 | **1** |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** | 0 | 1 | **1** |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | **0** | 1 | 0 | **0** |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | **1** | 1 | 1 | **1** |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | **1** | 0 | 1 | **1** |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** | 0 | 1 | **1** |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **0** | 1 | 1 | **1** |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **1** | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | **0** | 1 | 0 | **0** |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | **0** | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | **0** | 1 | 0 | **0** |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | **0** | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | **1** | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **0** | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **1** | 1 | 1 | **1** |

Z analizy kolumn 7 i 10 wynika, że implikacja jest prawdziwa. Poza wierszami 7, 10, 12 i 15 zachodzi ponadto równoważność.

# Wprowadzenie do logiki

## Ważniejsze reguły wnioskowania

- $\frac{p}{p \vee q}$ – reguła wprowadzania alternatywy,
- $\frac{p,\, q}{p \wedge q}$ – reguła wprowadzania koninkcji,
- $\frac{p \wedge q}{p}$ – reguła opuszczania koniunkcji,
- $\frac{p,\, p \Rightarrow q}{q}$ – reguła modus ponens (modus ponendo ponens),
- $\frac{p \Rightarrow q,\, \neg q}{\neg p}$ – reguła modus tollens (modus tollendo tollens),
- $\frac{p \vee q,\, \neg p}{q}$ – reguła ponendo tollens,
- $\frac{p \bigoplus q,\, p}{\neg q}$ – reguła ponendo tollens,
- $\frac{p \Rightarrow q,\, q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$ – reguła przechodniości (reguła sylogizmu hipotetycznego),
- $\frac{p \vee r,\, \neg r \vee q}{p \vee q}$ – reguła rezolucji,
- $\frac{p \wedge r,\, \neg r \wedge q}{p \wedge q}$ – odwrotna reguła rezolucji (konkluzja logiczna jest odwrócona),
- $\frac{p \Rightarrow q,\, r \Rightarrow s}{(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)}$ – prawo dylematy konstrukcyjnego,
- $\frac{p \Rightarrow q,\, r \Rightarrow s}{(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)}$ – prawo dylematy konstrukcyjnego.

# Sprowadzanie dowolnych formuł do postaci normalnych

## Sprowadzanie do CNF/DNF

1. $\Phi \Leftrightarrow \Psi \equiv (\Phi \Rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \Rightarrow \Phi)$ – eliminacja symboli równoważności,
2. $\Phi \Rightarrow \Psi \equiv \neg\Phi \vee \Psi$ – eliminacja symboli implikacji,
3. $\neg(\neg\Phi) \equiv \Phi$ – eliminacja zagnieżdżonych negacji,
4. $\neg(\Phi \vee \Psi) \equiv \neg\Phi \wedge \neg\Psi$ – zastosowanie prawa De Morgana do sprowadzania symbolu negacji bezpośrednio przed formułę atomową,
5. $\neg(\Phi \wedge \Psi) \equiv \neg\Phi \vee \neg\Psi$ – zastosowanie prawa De Morgana do sprowadzania symbolu negacji bezpośrednio przed formułę atomową,
6. $\Phi \vee (\Psi \wedge \Upsilon) \equiv (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Upsilon)$ – zastosowanie prawa rozdzielności alternatywy przy sprowadzaniu do CNF,
7. $\Phi \wedge (\Psi \vee \Upsilon) \equiv (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Upsilon)$ – zastosowanie prawa rozdzielności koninkcji przy sprowadzaniu do DNF.

Przykład:

$$
\begin{gathered}
(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q = \neg(p \wedge (p \Rightarrow q)) \vee q = \\
\neg(p \wedge \neg(p \vee q)) \vee q = (\neg p \vee \neg\neg(p \vee q)) \vee q = \\
(\neg p \vee (p \vee q)) \vee q = (\neg p \vee p \vee p \vee q) \vee q = \\
(\neg p \vee p \vee q = 1 \vee q = 1.
\end{gathered}
$$

Sprowadzenie do postaci normalnej formuły zawsze prawdziwej (zawsze fałszywej) pozwala określić jej wartość logiczną.

# Podstawowe definicje, określenia i twierdzenia

**Definicja 5** *Formuła jest nazywana:*

- tautologią *wtw. gdy jest prawdziwa przy każdej interpretacji;*
- formułą falsyfikowalną *gdy nie jest tautologią,*
- formułą spełnialną *wtw. gdy istnieje taka interpretacja, przy której formuła ta jest prawdziwa;*
- formułą niespełnialną, formułą niespójną *lub* formułą sprzeczną *wtw. gdy przy każdej interpretacji fromuła ta jest fałszywa;*
- *fomuła* $\Psi$ *jest* logiczną konsekwencją *formuły* $\Phi$, *co notujemy* $\Phi \models \Psi$ *wtw. gdy dla każdej interpretacji przy której* $\Phi$ *jest prawdziwa również* $\Psi$ *jest prawdziwa;*
- *formuła* $\Psi$ *jest* wyprowadzalna *z formuły* $\Phi$, *co notujemy* $\Phi \vdash \Psi$ *wtw. gdy istnieje ciąg reguł dowodzenia pozwalajacy uzyskać* $\Psi$ *z* $\Phi$.

Konsekwencje tych definicji:

- formuła jest tautologią wtw. gdy jej negacja jest niespełnialna (sprzeczna),
- formuła jest niespełnialna wtw. gdy jej negacja jest tautologią,
- formuła nie jest tautologią wtw. dla przynajmniej jednej inteerpretacji jest fałszywa,
- formuła jest niesprzeczna wtw. gdy dla przynajmniej jednej interpretacji jest prawdziwa,
- tautologia jest zawsze formułą spełnialną (ale nie odwrotnie),
- formuła niespełnialna jest formułą falsyfikowalną (ale nie odwrotnie).

# Zasady dowodzenia

## Twierdzenia o dedukcji

**Twierdzenie 1** *Jeżeli* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ *są formułami logicznymi (nazywanymi aksjomatami), formuła* $\Omega$ *(nazywana hipotezą lub konkluzją) jest ich logiczną konsekwencją wtw. gdy formuła* $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \Rightarrow \Omega$ *jest tautologią.*

**Twierdzenie 2** *Jeżeli* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ *są formułami logicznymi (nazywanymi aksjomatami), formuła* $\Omega$ *(nazywana hipotezą lub konkluzją) jest ich logiczną konsekwencją wtw. gdy formuła* $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \wedge \neg\Omega$ *jest sprzeczna.*

Problem dowodzenia twierdzeń ma postać: mając dane aksjomaty $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ uznane za prawdziwe wykazać prawdziwość hipotezy $\Omega$. Tak więc należy wykazać, że:

$$\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \models \Omega$$

Stosowane są następujące metody:

- sprawdzanie wszystkich możliwych interpretacji (wada: duża złożoność obliczeniowa),
- *dowód wprost* – korzystając z aksjomatów i reguł dowodzenia generujemy nowe formuły aż do uzyskania formuły $\Omega$,
- *dowodzenie tautologii* – korzystając z Tw.1 dowodzimy, że formuła $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \Rightarrow \Omega$ jest tautologią,
- *dowód nie wprost* – to dowód twierdzenia przeciwstawnego, równoważnego danemu. Polega na dowodzeniu twierdzenia postaci $\neg\Omega \models \neg(\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n)$.
- dowód przez *sprowadzenie do sprzeczności*; korzystają z Tw.2, polega na wykazaniu sprzeczności formuły: $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \wedge \neg\Omega$.