Elementy logiki dla informatyków

Wykład III

Elementy logiki.
Algebra Boole'a.
Analiza i synteza układów logicznych

Algebra Boole'a

Algebra Boole'a jest strukturą matematyczną postaci:

$$(\{0,1\}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1),$$

gdzie dany jest zbiór dwuelementowy, działania alternatywy (sumy), koniunkcji (iloczynu) oraz negacji (dopełnienia), a także element neutralny sumy i iloczynu. Dla uproszczenia zapisu koniunkcję $p \wedge q$ zapisujemy jako $p \cdot q$ lub pq, a negację $\neg p$ jako $\bar{p}$. Działania alegbry Boole'a spełniają następujące prawa:

- element neutralny: $p \vee 0 = p$, $p \cdot 1 = p$,
- identyczność: $p \vee 1 = 1$, $p \cdot 0 = 0$,
- idempotentność: $p \vee p = p$, $p \cdot p = p$,
- dopełnianie: $p \vee \bar{p} = 1$, $p \cdot \bar{p} = 0$,
- przemienność: $p \vee q = q \vee p$, $p \wedge q = q \wedge p$,
- łączność: $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$,
- rozdzielność: $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,
- pochłanianie: $(p \wedge q) \vee p = p$, $(p \vee q) \wedge p = p$,
- prawa De Morgana: $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$, $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$.

Przykładami algebr Boole'a są:

- Algebra zerojedynkowa: $(\{0,1\}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$,
- Zbiory: $(2^S, \cap, \cup, \bar{X}, \emptyset, S)$,
- Ciągi zerojedynkowe o długości n:
  $(\{ppp \ldots p : p \in \{0,1\}\}, \vee, \wedge, \neg, 000 \ldots 0, 111 \ldots 1)$.

Funkcje Booleowskie

Niech $\mathbf{B} = \{0, 1\}$. Funkcją booleowską n-argumentową nazywamy dowolną funkcję typu:

$$f: \mathbf{B}^n \longrightarrow \mathbf{B}.$$

W ogólnym przypadku istnieje 2^{2^n} różnych funkcji booleowskich. Dla $n = 1$ mamy cztery funkcje, dla $n = 2$ jest ich 16 a dla $n = 3$ aż 256.

Przykład funkcji 3-argumentowej przedstawiono poniżej.

p	q	r	$f(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Funkcja ta dla $p = 0$ realizuje koniunkcję pozostałych argumentów, a dla $p = 1$ – ich alternatywę; można więc ją zapisać w postaci:

$$f(p,q,r) = \bar{p} \cdot (q \cdot r) \vee p \cdot (q \vee r).$$

Inna postać tej funkcji:

$$f(p,q,r) = \bar{p} \cdot q \cdot r \vee p \cdot \bar{q} \cdot r \vee p \cdot q \cdot \bar{r} \vee p \cdot q \cdot r.$$

Wyrażenia postaci $x \cdot y \cdot z$, lub prościej xyz, gdzie $x = p$ lub $x = \bar{p}$, $y = q$ lub $y = \bar{q}$ oraz $z = r$ lub $z = \bar{r}$ nazywamy atomami (iloczynami) w $\mathbf{B}^3$. Różnych takich atomów jest 2^n. Każdą funkcję można przedstawić jako sumę atomów.

Postać minimalna:

$$f(p,q,r) = p \cdot q \vee p \cdot r \vee \vee q \cdot r.$$

Wyrażenia booleowskie

Wyrażenia booleowskie służą do zapisu i definiowania funkcji booleowskich.

Definicja 1 *Niech będą dane symbole zmiennych booleowskich* $p_1, p_2, \ldots, p_n$. *Wyrażeniem booleowskicm jest:*

- *symbol* 0, 1 *oraz każdy z symboli* $p_1, p_2, \ldots, p_n$,
- *jeżeli* P_1 *i* P_2 *sa wyrażeniami booleowskimi, to również* $P_1 \vee P_2$, $P_1 \wedge P_2$ *oraz* $\bar{P}_1$ $(\bar{P}_2)$ *sa wyrażeniami booleowskimi.*

Każde wyrażenie booleowskie definiuje pewna funkcje booleowską. Wartości tej funkcji dla konkretnego wyrażenia wyznaczamy stosując reguły algebry Boole'a.

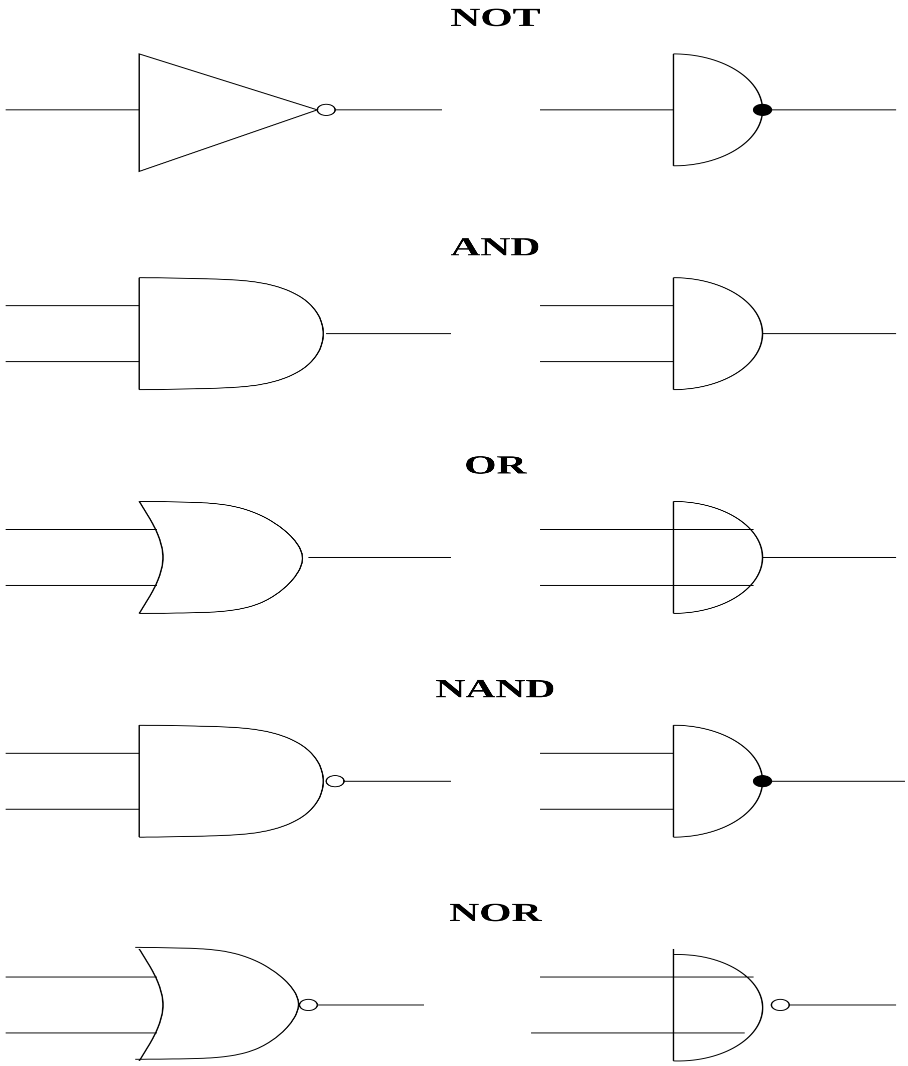
Dwa wyrażenia booleowskie nazywamy **równoważnymi** gdy definiują one identyczne funkcje.

Iloczynem minimalnym n zmiennych booleowskich nazywamy koniunkcję (atom w $\mathbf{B}^n$) n zmiennych; żadna zmienna nie może się powtarzać.

Każdą funkcję i każde wyrażenie booleowskie można przedstawić w równoważnej postaci składającej się z samych iloczynów minimalnych - jest to tzw. postać kanoniczna (postać normalna alternatywno-koniunkcyjna). Określenie postaci kanonicznej polega na wskazaniu które iloczyny minimalne wchodzą (+) do definicji funkcji, a które nie wchodza (−).

p	q	r	iloczyn	$f(p,q,r)$	czy wchodzi
0	0	0	$\bar{p}\bar{q}\bar{r}$	0	−
0	0	1	$\bar{p}\bar{q}r$	0	−
0	1	0	$\bar{p}q\bar{r}$	0	−
0	1	1	$\bar{p}qr$	1	+
1	0	0	$p\bar{q}\bar{r}$	0	−
1	0	1	$p\bar{q}r$	1	+
1	1	0	$pq\bar{r}$	1	+
1	1	1	pqr	1	+

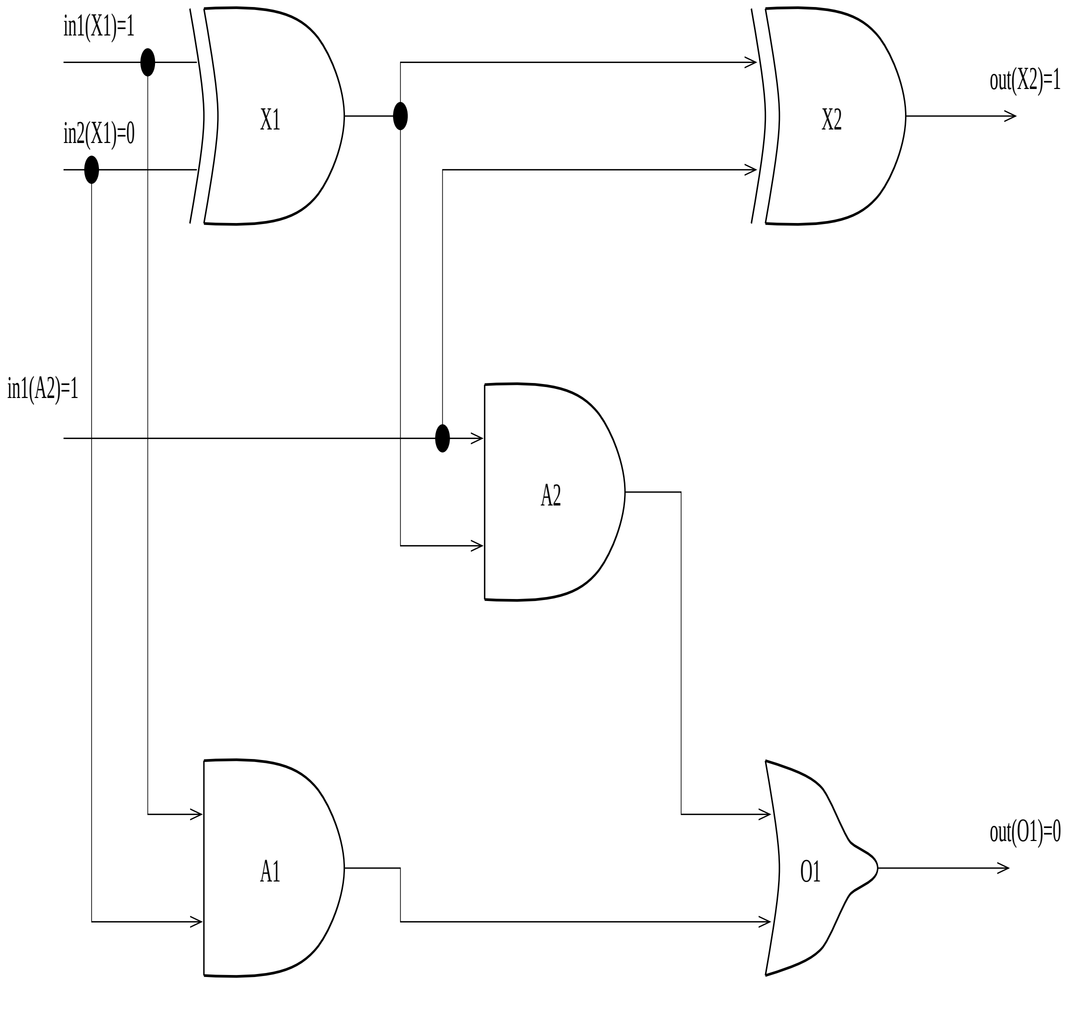
Bramki logiczne



Rysunek 1: Symbole bramek logicznych

Układy logiczne

Z bramek logicznych można budować dowolnie złożone układy logiczne.



Rysunek 2: Przykład układu logicznego – sumator.

Analiza układów logicznych

Analiza układów logicznych polega na rekonstrukcji funkcji logicznej realizowanej przez zadany układ logiczny. Można to zrobić posługując się matrycą logiczną układu. Dla układu z Rys. 2 mamy:

inp1(X1)	inp2(X1)	inp(A2)	X1	A1	A2	out(X2)	out(O1)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1

Na postawie powyższej tabeli można odtworzyć funkcje w postaci kanonicznej; dla uproszczenia podstawmy inp1(X1) $= p$, inp2)X1) $= q$, inp(A2) $= c$. Mamy:

$$out(X2) = \bar{p}\bar{q}c \vee \bar{p}q\bar{c} \vee p\bar{q}\bar{c} \vee pqc,$$

$$out(O1) = \bar{p}qc \vee p\bar{q}c \vee pq\bar{c} \vee pqc.$$

Można też określić postacie minimalne dla tych funkcji:

$$out(X2) = \bar{p}\bar{q}c \vee \bar{p}q\bar{c} \vee p\bar{q}\bar{c} \vee pqc,$$

$$out(O1) = pq \vee pc \vee qc.$$

Postać minimalna i kanoniczna funkcji out(X2) są identyczne.

Funkcje tego układu można też określić bezpośrednio w oparciu o schemat; jednak jest ona bardziej skomplikowana i trudna do dalszej analizy.

Synteza układów logicznych

Synteza układów logicznych polega na zaprojektowaniu struktury sieci logicznej realizującej określoną funkcję. Funkcja którą należy zrealizować może być zadana:

- ekstensjonalnie – w postaci tabeli wejścia-wyjście,
- intensjonalnie – w postaci wyrażenia logicznego (booleowskiego).

Etapy projektowania obejmują:

- specyfikację funkcji (np. werbalną, w postaci zestawu warunków),
- budowę tablicy opisującej relacje wejścia-wyjścia,
- generację funkcji,
- minimalizację i ew. faktoryzację funkcji,
- implementację z wykorzystaniem zadanych bramek logicznych.

Tablica definiująca funkcję budowana jest w oparciu o werbalną specyfikację funkcji, np.:

> *Zaprojektować układ do głosowania, o trzech wejściach, który daje na wyjściu* 1 *o ile przynajmniej na dwóch wejściach pojawią się jedynki.*

p	q	r	$f(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Synteza układów logicznych

Dla tabeli specyfikującej działanie funkcji można łatwo zbudować postać kanoniczną funkcji. W tym celu należy:

- uwzględnić jedynie te wiersze tabeli, w których na wyjściu układu jest 1,
- dla każdego takiego wiersza zbudować iloczyn minimalny zawierający wszystkie zmienne wejściowe,
- jeżeli w danym wierszu zmienna wejściowa przyjmuje wartość 1 to w iloczynie minimalnym występuje bez negacji,
- jeżeli w danym wierszu zmienna wejściowa przyjmuje wartość 0 to w iloczynie minimalnym występuje z negacją,
- wygenerowane iloczyny minimalne połączyć symbolem alternatywy.

Postać kanoniczna tej funkcji:

$$f(p,q,r) = \bar{p} \cdot q \cdot r \vee p \cdot \bar{q} \cdot r \vee p \cdot q \cdot \bar{r} \vee p \cdot q \cdot r.$$

Postać kanoniczna jest zwykle zbyt rozbudowana, aby wykorzystać ją bezpośrednio do syntezy układu. Należy zatem dokonać minimalizacji funkcji korzystając z praw algebry Boole'a.

Minimalizacja może przebiegać następująco:

$$\begin{aligned}
&\bar{p} \cdot q \cdot r \vee p \cdot \bar{q} \cdot r \vee p \cdot q \cdot \bar{r} \vee p \cdot q \cdot r = \\
&(\bar{p} \cdot q \cdot r \vee p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r \vee p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r} \vee p \cdot q \cdot r) = \\
&q \cdot r \vee p \cdot r \vee p \cdot q.
\end{aligned}$$

Dla realizacji tej funkcji potrzeba 3 bramki AND i 2 bramki OR.

Dla realizacji funkcji z wykorzystaniem bramek NAND stosujemy przekształcenie: $f(p,q,r) = \overline{\overline{q \cdot r \vee p \cdot r \vee p \cdot q}} = \overline{\overline{pq} \cdot \overline{pr} \cdot \overline{qr}}$. (4 bramki NAND).

Minimalizacja i przekształcanie wyrażeń

Minimalizację i przekształcanie funkcji logicznych można prowadzić z wykorzystaniem reguł algebry Boole'a; pozwalają one zachować *równoważność* wyrażeń booleowskich (funkcji). Przy minimalizacji szczególnie użyteczne są następujące reguły:

Reguła sklejania wyrażeń iloczynowych

Niech będą dane dwa iloczyny literałów postaci $x_1x_2 \dots x_{i-1}px_{i+1} \dots x_n$ oraz $x_1x_2 \dots x_{i-1}\bar{p}x_{i+1} \dots x_n$, które są identyczne poza i-tą pozycją na której występują literały komplementarne. Iloczyny te można zastąpić jednym iloczynem wg następującego schematu:

$$\frac{x_1x_2 \dots x_{i-1}p\; x_{i+1} \dots x_n,\;\; x_1x_2 \dots x_{i-1}\bar{p}\; x_{i+1} \dots x_n}{x_1x_2 \dots x_{i-1}{-}x_{i+1} \dots x_n}$$

Symbol $-$ oznacza *dowolną wartość* i może zostać pominięty; otrzymamy wówczas skrócony iloczyn postaci $x_1x_2 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_n$.

Reguła pochłaniania wyrażeń iloczynowych

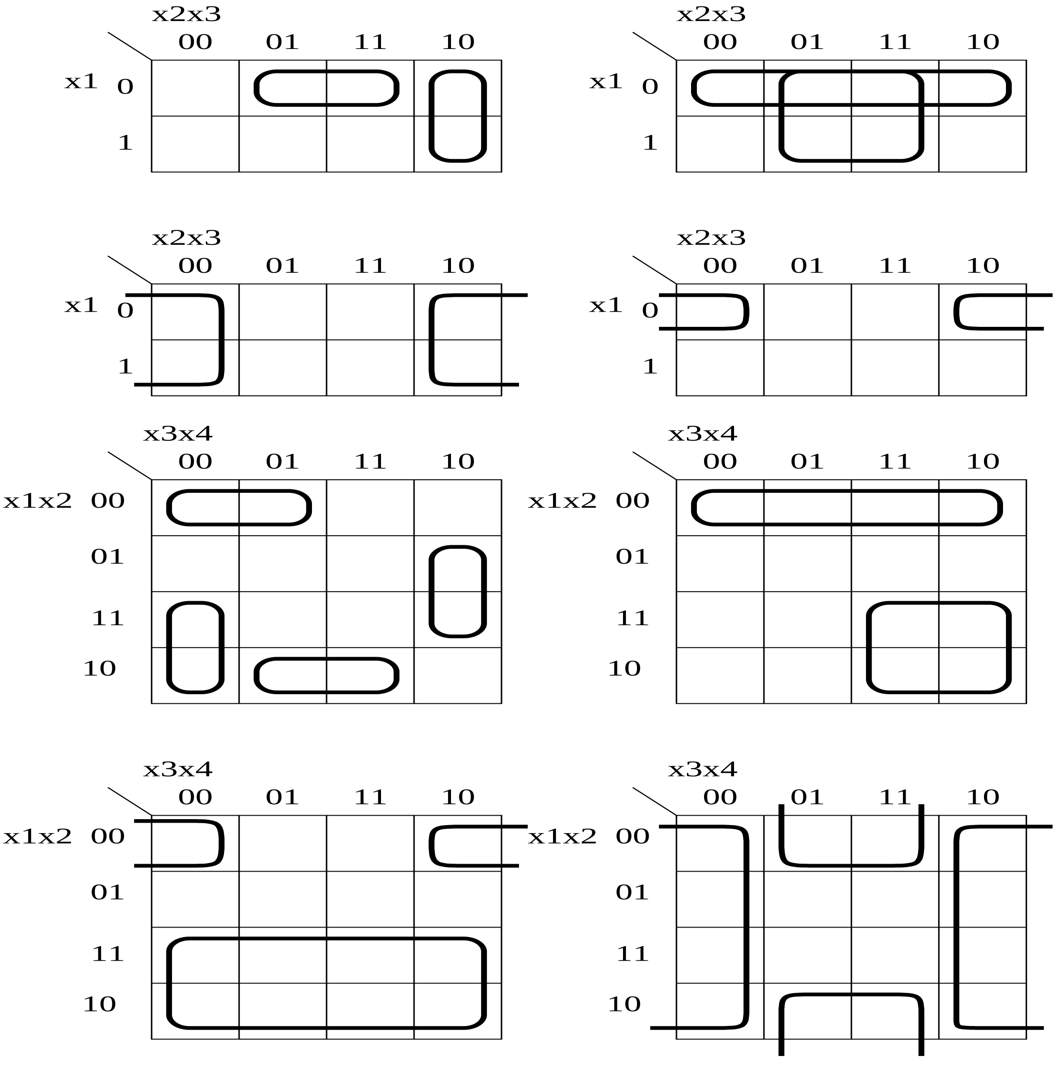
W trakcie redukcji wyrażeń booleowskich może okazać się, że pewne wyrażenia przestają być niezbędne dla zapisu funkcji – stają się one nadmiarowe i jako takie mogą być usunięte. Niech będą dane dwa iloczyny literałów postaci $x_1x_2 \dots x_n$ oraz $y_1y_2 \dots y_n$. Powiemy, że zachodzi pochłanianie:

$$x_1x_2 \dots x_n \geq y_1y_2 \dots y_n$$

wtw. gdy dla każdego i, $x_i = y_i$ lub $x_i = -$. Inaczej, wyrażenie pochłaniające przyjmuje wartość 1 zawsze gdy wyrażenie pochłaniane przyjmuje wartość 1. Wyrażenie pochłaniane $y_1y_2 \dots y_n$ można wyeliminować (bez wpływu na równoważność; pamiętajmy, że $x_1x_2 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_n \equiv x_1x_2 \dots x_{i-1}{-}x_{i+1} \dots x_n$).

Tablice Karnaugha

Tablice Karnaugha stanowią wizualne narzędzie wspomagające minimalizację wyrażeń booleowskich i funkcji logicznych. Istota tablic Karnaugha polega na uwidocznieniu wyrażeń, które mogą podlegać sklejaniu w postaci *sąsiednich pól* odpowiednio skonstruowanej tablicy.



Rysunek 3: Przykłady tablic Karnaugha

Zasady sklejania w tablicach Karnaugha

Konstrukcja tablic Karnaugha jest taka, że każde dwie sąsiednie kratki specyfikują iloczyny logiczne różniące się dokładnie na jednej pozycji; pola takie można zatem skleić, analogicznie jak iloczyny zmiennych.

Obowiązują następujące zasady sklejania:

- oznaczenia kratek:
  - $n = 2$: 00, 01, 11, 10,
  - $n = 3$: 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100.
- sklejaniu podlegają wszystkie pola zawierające 1; pola zawierające – mogą, ale nie muszą być pokryte (są one uwzględniane w miarę potrzeb),
- sklejane obszary muszą mieć kształt prostokąta; sklejane mogą być również "prostokąty" skonstruowane na zasadzie sąsiedztwa pól rozmieszczonych symetrycznie na krawędziach,
- należy wykorzystać prostokąty pokrywające jak największą liczbę jedynek,
- już pokryte jedynki można wykorzystać do ponownego sklejania, o ile jest taka potrzeba,
- dla danego prostokąta budowany jest iloczyn zmiennych, przy czym:
  - jeżeli wewnątrz obszaru dana zmienna przyjmuje stale wartość 1, to jest uwzględniana bez negacji,
  - jeżeli wewnątrz obszaru dana zmienna przyjmuje stale wartość 0, to jest uwzględniana z negacją,
  - jeżeli wewnątrz obszaru dana zmienna przyjmuje wartość 1 i 0, to jest pomijana.

Przykład syntezy: sumator jednobitowy

Specyfikacja zadania

Należy skonstruować układ logiczny stanowiący sumator jednobitowy, uwzględniający również przeniesienie. Na wejściu sumatora mamy dwa sumowane bity (sygnały p i q) oraz bit przeniesienia c. Na wyjściu sumatora mamy bit wyniku s oraz bit przeniesienia t. Bit wyniku s jest równy 1 wtedy i tylko wtedy gdy suma sygnałów wejściowych jest nieparzysta (jedna albo trzy jedynki). Bit przeniesienia t jest równy 1 wtedy i tylko wtedy gdy sumowane są co najmniej dwie jedynki. Odpowiednią tablicę specyfikacji funkcji s i t podano poniżej.

p	q	c	s	t
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Postacie kanoniczne funkcji s i t mogą być odczytane bezpośrednio z tabeli; na tej podstawie można wypelnić odpowiednie tabele Karnaugha. Otrzymane postacie minimalne funkcji s i t są następujące:

$$s = \bar{p}qc \vee p\bar{q}\bar{c} \vee \bar{p}\bar{q}c \vee pqc,$$

$$t = pq \vee pc \vee qc.$$

Inna postać z wykorzystaniem EX-OR): $s = p \oplus q \oplus c$, $t = pq \vee (p \oplus q)c$.

TTT

TTT