Wprowadzenie do Mathcad 15 – część 5

Równania różniczkowe

Jednym z najważniejszych elementów symulacji procesów jest opis ich dynamiki, który zazwyczaj wiąże sie z równaniem, lub jeszcze częściej układem równań różniczkowych. W ramach tego wstępu ograniczymy się do równań i układów równań różniczkowych zwyczajnych, pomijając trudniejsze równania cząstkowe.

Niezależnie od metody rozwiązania która będzie stosować, należy wcześniej zadać trzy elementy:

- Warunki początkowe (inaczej mówiąc rozwiązujemy problem Cauchy'ego)
- Zakres w którym Mathcad ma poszukiwać rozwiązań
- Równanie, zapisane w odpowiedniej dla danego sposobu rozwiązania formie.

Do rozwiązania równań różniczkowych służą następujące polecenia:

Given ……. Odesolve(x,n), gdzie

- *x - zmienna*
- *n – punkt końcowy*

konstrukcja tej komendy wygląda dokładnie tak samo jak umówione poprzednio metody blokowe;

lub

rkfixed(yp,x1,x2,m,D), gdzie:

- yp – wektor warunków początkowych (dim (yp) =n =rząd równania)
- x1,x2 – zakres w którym poszukiwane są rozwiązania
- m – określa liczbę punktów które zostaną wygenerowane do określenia rozwiązania
- D – funkcja D(x,yp) zawierająca pierwsze pochodne poszukiwanych funkcji.

<u>Przykład</u>

Rozwiązanie równania: **y'+3y=0**

1. **Odesolve**

Given

d/dx y(x) + 3y(x) = 0, y(0)=3 (warunek początkowy)

Sol:=Odesolve(x,10)

2. **Rkfixed**

y_0=3 -> initial value

D(x,y) :=-3y_0

Sol:=rkfixed(y,0,10,100,D)

Rozwiąż podane równania różniczkowe:

$$\frac{dy}{dx} - \sqrt{2}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y^3 + \sqrt{x^3}$$

Przedstawiona powyżej metoda pozwala również na obliczanie rożwiązań równań wyższych rzędów. Jedyną różnicą będzie definicja wektora yp, który musi zawierać tyle pochodnych co rząd równania.

Układy równań różniczkowych

Rozwiązuje się dokładnie takimi samymi jak zwykłe równania, a więc można stosować zarówno polecenie ***Given.. odesolve***, jak również ***rkfixed***. Trzeba jednak uważać na uwzględnienie odpowiedniej liczby warunków początkowych i odpowiednia notację.

Ćwiczenie:

1. Rozwiąż równanie 4 rzędu:

   $y^{(4)} - 2k^2y^{(2)} + k^4y = 0, \quad for\ k = 3$

   Niech wektor warunków początkowych będzie dany y=(0,1,2,3). Proszę zastosować obie omówione metody.
2. Rozwiąż następujący układ równań różniczkowych:

   u''(t)=2v(t); v''(t)=4v(t)-2u(t)

   z zadanymi warunkami początkowymi: u(0)=1,5; u'(0)=1; v(0)=1; v'(0)=1

3. Rozpatrzmy układ trzech połączonych kaskadowo zbiorników o zadanych polach przekroju(S1, S2, S3) i współczynnikach wypływu (k1, k2, k3). Do pierwszego zbiornika dopływa ciecz o natężeniu Q1, danym równaniem:

$$Q1(t) = 50 * 10^{-3} * \exp(-0.02 * t)$$

Zakładając, że początkowo wszystkie zbiorniki były puste zilustruj przebieg zmian wysokości cieczy w zbiornikach. Jakie będą maksima wysokości cieczy w poszczególnych zbiornikach?

Dane:

S1=1 m^2, S2=1,3m^2, S3=1,5m^2

k1=0.08, k2=0.06, k3=0.04 [$m^3/s*m^{1/2}$]