

## Statystyka – ćwiczenia audytoryjne

Technologia chemiczna I rok, 2019/2020

### Zestaw 2 – rozkłady prawdopodobieństwa

#### I. Definicje

**Zmienna losowa** - funkcja przypisująca zdarzeniom elementarnym wartość liczbową. Wyróżniamy zmienne losowe dyskretne (można opisać przez podanie wszystkich przyjmowanych wartości) i ciągłe (dystrybuanta jest funkcją ciągłą).

**Funkcja gęstości prawdopodobieństwa** - nieujemna funkcja rzeczywista, określona dla rozkładu prawdopodobieństwa, taka że całka z tej funkcji, obliczona w odpowiednich granicach, jest równa prawdopodobieństwu wystąpienia danego zdarzenia losowego.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

**Dystrybuanta** - funkcja rzeczywista jednoznacznie wyznaczająca rozkład prawdopodobieństwa.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym by funkcja  $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  była dystrybuantą pewnego rozkładu jest:

1.  $F$  jest niemalejąca
2.  $F$  jest prawostronnie ciągła
3. Spełnia:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  oraz  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

**Wartość oczekiwana** - wartość określająca spodziewany wynik doświadczenia losowego. Wartość oczekiwana to inaczej pierwszy moment zwykły. Estymatorem wartości oczekiwanej rozkładu cechy w populacji jest średnia arytmetyczna.

Dla zmiennej losowej dyskretnej

$$\sum_i x_i p_i = E(x)$$

Dla zmiennej losowej ciągłej:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x)dx = E(X)$$

**Wariancja** – miara zmienności rozkładu, intuicyjnie jest średnią arytmetyczną kwadratów odchyłeń (różnic) poszczególnych wartości cechy od wartości oczekiwanej.

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

#### Rozkład dwumianowy

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

#### Rozkład Poissona

$$f(x) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

## II. Zmienna losowa dyskretna

### Zadanie 1

Rzucamy 5 razy monetą. Niech zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe liczbie wyrzuconych reszek. Znaleźć rozkład zmiennej  $X$  oraz obliczyć  $D^2X$ .

### Zadanie 2

W urnie znajduje się 8 kul, 3 białe i 5 czarnych. Wyciągamy losowo 3 kule. Niech zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe liczbie wylosowanych kul czarnych.

- Znaleźć funkcje rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej  $X$  oraz wyznaczyć jej wartość oczekiwaną
- Wyznaczyć oraz narysować dystrybuantę tej zmiennej losowej

### Zadanie 3

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład dwumianowy z wartością oczekiwaną 40 i wariancją 30. Znaleźć  $n$  i  $p$ .

### Zadanie 4

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład Poissona z parametrem  $\lambda = 2$ . Znaleźć wariancję zmiennej losowej  $Z = 2X - 3$ . Narysować wykres dystrybuanty zmiennej  $Z$ .

### Zadanie 5

Dana jest dystrybuanta zmiennej losowej skokowej  $X$ :

$X$	$(-\infty, 0]$	$(0, 1]$	$(1, 2]$	$(2, 3]$	$(3, 4]$	$(4, +\infty)$
$F(X)$	0	0,12	0,44	0,62	0,78	1

- Wyznaczyć jej funkcje rozkładu prawdopodobieństwa.
- Obliczyć  $EX$  oraz  $D^2X$ .
- Obliczyć  $P(1 < X \leq 3)$ ,  $P(X = 12)$ ,  $P(X > 5)$ .