

Zasady planowania eksperymentu i opracowania wyników pomiarów

Zmienne losowe

18 marca 2014

1. Rozważamy rzut symetryczną kostką sześcienną. Każdemu zdarzeniu, że na kostce wypadło k oczek przypisujemy wartość 2^k . Przedstawić rozkład powstającej w ten sposób zmiennej losowej oraz narysować wykres jej dystrybuanty.
2. Rzucamy symetryczną kostką do gry. Gdy wypadnie parzysta liczba oczek wygrywamy 2zł, gdy wypadnie nieparzysta większa niż jeden przegrywamy 4zł, a gdy wypadnie 1 oczko wygrana wynosi 0. Przedstawić rozkład opisanej zmiennej losowej oraz obliczyć jej wartość oczekiwaną.
3. Niech zmienna losowa X ma gęstość daną wzorem:

$$f(x) = Ce^{-|x|}$$

Obliczyć wartość parametru C , aby powyższa funkcja była gęstością prawdopodobieństwa oraz znaleźć $P(X > -1)$.

4. Niech $P(X = 0) = \frac{2}{3}$, $P(X = 1) = \frac{1}{3}$. Wyznaczyć dystrybuantę i narysować jej wykres.
- 5.

<i>sprzedawcy</i>	1	2	3	4	5
<i>sklepy</i>	30	66	34	20	10

Powyższa tabela przedstawia rozkład ilości sprzedawców w 160 przebadanych sklepach. Na podstawie tej informacji

- (a) znaleźć rozkład prawdopodobieństwa liczby sprzedawców;
 - (b) obliczyć parametry rozkładu i podać ich interpretację;
 - (c) obliczyć prawdopodobieństwo, że liczba sprzedawców będzie: i) nie mniejsza od 3
ii) nie większa niż 7.
6. Zmienna losowa ma rozkład jednostajny na zbiorze $A = [-1, 0] \cup [2, 4]$. Wyznaczyć gęstość oraz $P(|X - \frac{3}{2}| < 2)$.
 7. Rzucamy symetryczną monetą aż do otrzymania pierwszego orła lub trzech reszek. Znaleźć wartość średnią i wariancję dla tego doświadczenia.
 8. Obliczyć wartość oczekiwaną dla rozkładu Bernoulliego.

9. Czas T (w minutach) jest zmienną losową o dystrybucji:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-\frac{1}{3}t) & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

Wyznaczyć:

- prawdopodobieństwo, że $1 < T < 2$
 - funkcję gęstości tego rozkładu
 - wartość oczekiwaną i wariancję.
10. Wyniki pomiaru długości śrub produkowanych w pewnej fabryce są następujące: 6,0; 6,1; 6,3; 5,9; 5,8; 6,0; 6,3; 6,2; 6,1; 6,3; 5,8; 6,4
Traktując długość jako zmienną losową zapisać jej rozkład gęstości, wartość oczekiwaną oraz wariancję.
11. Zmienna losowa X ma następujący rozkład:

X	-2	-10	0	1
$P(X = x)$	0,1	c	0,3	0,4

- obliczyć wartość c ;
 - Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennych $Y = 2X - 1$ oraz $Z = x^2 + 1$
 - obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych X, Y, Z .
12. Realizacją zmiennej losowej jest liczba oczek wyrzuconych na sześcienną kostkę. Dla takiej zmiennej obliczyć momenty zwykłe oraz momenty centralne (zerowego, pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia).
13. Znaleźć dystrybuantę oraz obliczyć prawdopodobieństwo $P(|X - 1/8| < 5/8)$ dla rozkładu o gęstości f

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{dla } x \in [-1, 0) \\ x & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1, 1] \end{cases} \quad (1)$$

Zadania dla chętnych (5 punktów za przedstawienie poprawnego rozwiązania)

14. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej Y , jeżeli:
- $Y = X^2$ oraz X ma rozkład o gęstości $f(x) > 0$
 - $Y = \sin X$ oraz X ma rozkład jednostajny na przedziale $(-\frac{1}{2}\pi, \pi)$
15. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $Y = 3X - 2$ jeżeli X ma rozkład wykładniczy.