Zasady planowania eksperymentu i opracowania wyników pomiarów

Leszek Stępień

14 maja 2014

1 Rozkład normalny

1. Dla zmiennej losowej o rozkłądzie normalnym $N(100; 10)$ obliczyć: $P(X < 100)$; $P(X > 130)$; $P(75 < X < 105)$.

2. Dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym obliczyć:

   (a) $P(x - \sigma < X < x + \sigma)$

   (b) $P(x - 2\sigma < X < x + 2\sigma)$

   (c) $P(x - 3\sigma < X < x + 3\sigma)$

3. Pewien przyrząd pomiarwy robi błąd systematyczny równy 1 metr w kierunku zawyżenia pomiaru oraz błąd losowy o rozkładzie $N(0, 0.5)$

   (a) Obliczyć wartość przeciętną błędu pomiaru

   (b) Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że błąd z jakim są mierzone badane przedmioty nie przekracza 2m.

4. Wytrzymałość stalowych lin pochodzących z produkcji masowej jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(1000kg/cm^2, 50kg/cm^2)$. Obliczyć jaki procent lin ma wytrzymałość mniejszą od $900kg/cm^2$.

5. Automat produkuje nity o rozmiarze podlegającym rozkładowi normalnemu $N(2; 0.1)$. Jakie rozmiary z przedziału $(2 - \epsilon; 2 + \epsilon)$ można zagwarantować z prawdopodobieństwem 0.95.

6. Ślusarz zakupił maszynę do dorabiania kluczy, która pracuje ze średnią niedokładnością (mierzoną wartością odchylenia standardowego) $\pm 0.01mm$. Skutki ewentualnej niedokładności zauważalne są dopiero przy odchyleniu od wzorca o $\pm 0.025mm$. Ilu średnio klientów, którzy przyjdą z zażaleniem w ciągu tygodnia może oczekiwać ślusarz, jeżeli tygodniowo obsługuje 100 klientów, a błedy podlegają rozkłądowi normalnemu.

7. Zmienna losowa podlega rozkładowi normalnemu $N(1, 2)$. Obliczyć stałą b, spełniającą równanie $P(|X - 1| < b) = 0.9$

8. Dla rozkładu normalnego $N(78; 8.2)$ wyznaczyć pierwszy i trzeci kwartyl.

1.1 Rozkład wykładniczy

1. Przeciętny czas niezawodnej pracy produkowanego seryjnie urządzenia wynosi 10 200h. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrane urządzenie będzie pracować prawidłowo przez:
   (a) co najmniej 10 200 h?
   (b) co najmniej 20 400 h?
   (c) mniej niz 1200h?
2. Wiedząc, że średni czas niezawodnej pracy pewnwego urządzenia wynosi 1000hobliczyć prawdopodobieństwo, ze:
   (a) urządzenie bedzie pracowało co najmniej 3000h
   (b) Urządzenie będzie pracowało mniej niz 500h?
3. Wiedząć że średni czas pracy pewnego urzadzenia wynosi 5000h, pewna firma zakupiła 3 takie urządzenia. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy jednoczesnej pracy tych urządzeń:
   (a) żadne nie przepracuje dłużej niz 1000h
   (b) co najmniej jedno przepracuje więcej niż 5000h,
   (c) wszystkie przepracują co najmniej 5000h,
   (d) dokładnie 2 przepracują minimum 7500h?

2 Centralne twierdzenie graniczne

2.1 (Bardzo) krótki wstep teoretyczny

Centralne twierdzenie graniczne
Jeżeli $\{X\}_n$ jest losowym ciągiem zmiennych o jednakowym rozkładzie, o wartości przeciętnej α_1 i skonczonej wariancji $\sigma^2 > 0$, to ciąg $\{F_n\}$ dystrybuant standaryzowanych średnich arytmetycznych $\overline{X - n}$

$$Y_n = \frac{\overline{X_n} - \alpha_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

jest zbieżny do dystrybuanty Φ rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

Integralne twierdzenie graniczne (Moivre'a - Laplace'a)
Jeśli (S_n) jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie dwumianowym z parametrami $(n, p); 0 < p < 1$ czyli $ES_n = np$ oraz $VarS_n = npq$ oraz Y_n jest standaryzowanym ciągiem zmiennych losowych:

$$Y_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$$

to dla każdej pary wartości $y_1 < y_2$ zachodzi wzór:

$$lim_{n\to\infty} P\left(y_1 < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < y_2\right) = \Phi(y_2) - \Phi(y_1)$$

2.2 Zadania

1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy wykonaniu 1000 rzutów monetą róznica między liczbą orłów i liczbą reszek będzie większa niż 100?

2. Prawdopodbieństwo, że w czasie T przestanie świecić jedna żarówka jest równe $0,1$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w czasie T spośród 100 żarówek przestanie świecić od 7 do 19 żarówek (zakładamy, że żarowki przepalają się niezależnie).

3. Urządzenie skłąda się z n elementów. Urządzenie to pracuje poprawnie, jeśli co najmniej 70% elementów jest sprawnych. Prawdopodobieństwo awarii jednego elemntu wynosi 0,2. Obliczyć jak duża powinna być liczba elementów, aby z prawdopodobieństwem 0,95 urządzenie pracowało.

4. Partia towaru zawiera 20% braków (wadliwość partii). Obliczyć prawdopodobieństwo, że w partii o liczności:

   (a) $n = 100$ sztuk;

   (b) $n = 500$ sztuk;

   (c) $n = 1500$ sztuk;

   stosunek $\frac{k}{n}$ (gdzie k oznacza liczbę braków) różni się od wadliwości p w partii o nie więcej niż 0,02.

5. W zajezdni znajduje sie 200 autobusów. Prawdopobieństwo, że losowo wybrany autobus jest sprawny wynosi 0.7. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dowolnej chwili co najmniej 160 autobusów będzie sprawnych?