

PROBLEM:

MAJĄC DANE WSPÓŁRZĘDNE KARTEZJAŃSKIE PUNKTU P_G ZNALEŹĆ WSPÓŁRZĘDNE GEODEZYJNE TEGO PUNKTU.

Związek między współrzędnymi kartezjańskimi a geodezyjnymi dla punktu poza elipsoidą.

$$\begin{aligned}x_G &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\y_G &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\z_G &= \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 N + h \right] \sin \varphi\end{aligned}$$

gdzie:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \text{ - promień krzywizny w pierwszym wertykale}$$

a, b – odpowiednio długość dużej oraz małej półosi elipsoidy

x_G, y_G, z_G – współrzędne kartezjańskie punktu poza elipsoidą

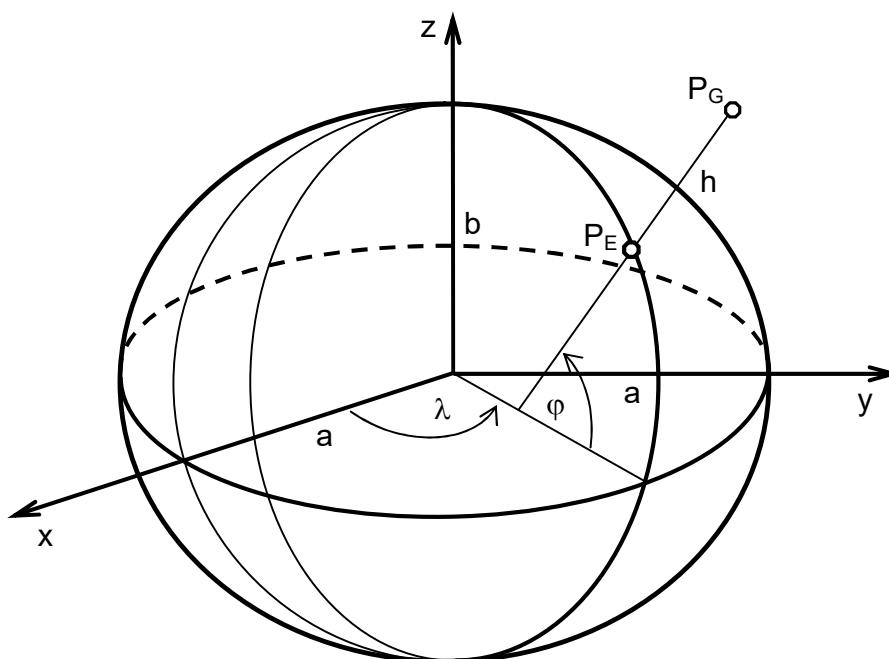
x_E, y_E, z_E – współrzędne kartezjańskie punktu na elipsoidzie

φ, λ, h – współrzędne geodezyjne; szerokość, długość i wysokość elipsoidalna

$$e^2 \text{ – kwadrat pierwszego mimośrodu } e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2$$

Związek między współrzędnymi kartezjańskimi a geodezyjnymi dla punktu na elipsoidzie $h=0$

$$\begin{aligned}x_E &= N \cos \varphi \cos \lambda \\y_E &= N \cos \varphi \sin \lambda \\z_E &= \left(\frac{b}{a} \right)^2 N \sin \varphi\end{aligned}$$



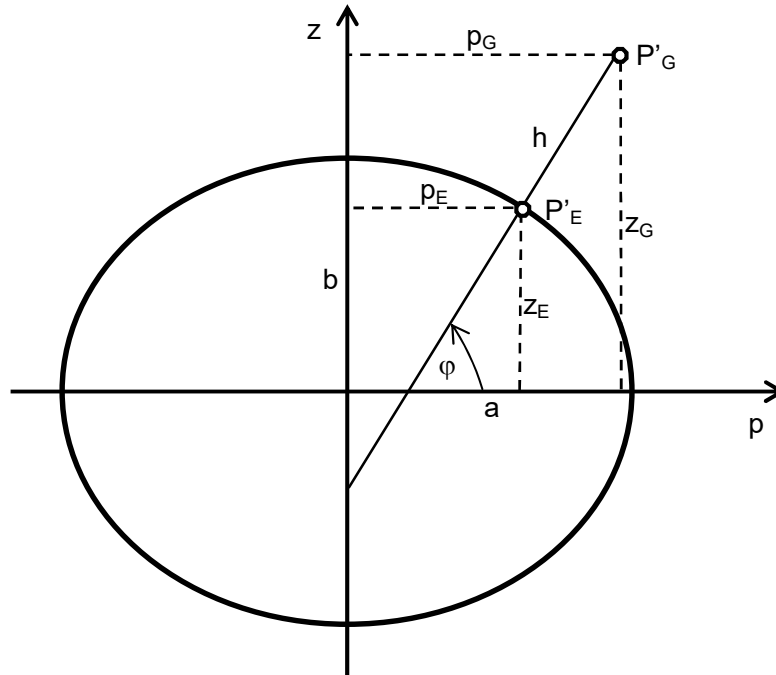
Rysunek 1: Współrzędne geodezyjne, elipsoida obrotowa

Rozwiązanie problemu konwersji współrzędnych bezpośrednio na elipsoidzie niepotrzebnie komplikuje rachunki, zwłaszcza, że na podstawie związków między współrzędnymi kartezjańskimi a geodezyjnymi natychmiastowo otrzymujemy długość geodezyjną λ .

$$\lambda = \arctan \frac{y_G}{x_G} = \arctan \frac{y_E}{x_E}$$

(uwaga na odpowiednie ćwiartki)

W celu znalezienia szerokości oraz wysokości geodezyjnej łatwiej przejść na elipsę południkową (w przypadku elipsoidy obrotowej każdy przekrój południkowy jest taką samą elipsą). Choć i takie uproszczenie zagadnienia wcale nie czyni go trywialnym (może ktoś z Was spróbuje go rozwiązać).



Rysunek 2: Współrzędne (φ, h) , elipsa południkowa

gdzie:

$$p_G = \sqrt{x_G^2 + y_G^2}$$

$$p_E = \sqrt{x_E^2 + y_E^2}$$

Problem przeliczania współrzędnych $(x, y, z) \rightarrow (\varphi, \lambda, h)$ jest bardzo popularny w literaturze geodezyjnej, można powiedzieć, że co roku pojawia się jakieś nowe rozwiązanie problemu. Rozwiązania zadania można podzielić na ścisłe oraz iteracyjne. Ścisłe rozwiązania polegają na rozwiązaniu równania czwartego stopnia ze względu na różne (w zależności od metody) parametry, które prowadzą do wyniku. Iteracyjne natomiast polegają na szukaniu kolejnych przybliżeń parametru, który rozwiązuje zadanie. W tym konspekcie przedstawiono dwie metody iteracyjne: metodę Bowringa (w ujęciu Fukushima) oraz metodę Fukushima. Przedstawiono również ścisłe rozwiązanie – metoda Borkowskiego.

ALGORYTM BORKOWSKIEGO (1989 R.)

Metoda Borkowskiego jest metodą ścisłą i polega na rozwiązaniu równania 4 stopnia metodą Ferrariego ze względu na $t = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)$, gdzie u – szerokość parametryczna (zredukowana). Równanie Borkowskiego przedstawiane jest w formie:

$$t^4 + 2Et^3 + 2Ft - 1 = 0$$

$$\text{gdzie: } E = \frac{bZ - (a^2 - b^2)}{ap}, F = \frac{bZ + (a^2 - b^2)}{ap}, p = \sqrt{x^2 + y^2}, Z = |z|$$

„p” w powyższych wzorach jest równe p_G zgodnie z oznaczeniami na rysunku 2, oraz $x = x_G$, $y = y_G$, $z = z_G$

W celu rozwiązania równania ze względu na t konieczne są dodatkowe wielkości wynikające z metody Ferrariego:

$$P = \frac{4(EF + 1)}{3}$$

$$Q = 2(E^2 - F^2)$$

$$D = P^3 + Q^2$$

$$v = \sqrt[3]{\sqrt{D} - Q} - \sqrt[3]{\sqrt{D} + Q}$$

$$G = \frac{\sqrt{E^2 + v} + E}{2}$$

$$t = \sqrt{G^2 + \frac{F - vG}{2G - E}} - G$$

Skąd ostatecznie otrzymujemy szerokość i wysokość geodezyjną:

$$\varphi = \arctan \frac{a(1 - t^2)}{2bt}$$

$$h = (p - at)\cos \varphi + (Z - b)\sin \varphi$$

$$\varphi = \operatorname{sign}(z)\varphi$$

ALGORYTM BOWRINGA W SZYBKIEJ IMPLEMENTACJI FUKUSHIMY (1999R.)

1. Wartość początkowa parametru: $T_0 = \frac{z_G}{e' p_G}$

2. Obliczenie wielkości: $C = \frac{1}{\sqrt{1+T^2}}$ oraz $S = CT$

3. Obliczenie kolejnej wartości parametru: $T = \frac{z' + cS^3}{p_G - cC^3}$

gdzie:

$$e' = \sqrt{1-e^2}, \quad c = ae^2, \quad z' = e'z_G, \quad p_G = \sqrt{x_G^2 + y_G^2}$$

4. Obliczenie (φ, h)

$$\varphi = \arctan\left(\frac{T}{e'}\right)$$

jeżeli $p_G > z_G$ wtedy

$$h = \frac{\sqrt{(1-e^2)+T^2}}{e'} \left(p_G - \frac{a}{\sqrt{1+T^2}} \right)$$

w innym przypadku

$$h = \sqrt{(1-e^2)+T^2} \left(\frac{z_G}{T} - \frac{b}{\sqrt{1+T^2}} \right)$$

Krok (2) oraz (3) powtarzane są do momentu uzyskania odpowiedniej dokładności.

ALGORYTM FUKUSHIMY (2006R.)

1. Wartość początkowa parametru: $T_0 = \frac{|z_G|}{e_c p_G} = \frac{Z}{e_c^2 P}$

2. Równanie do rozwiązania: $g(T) = PT - Z - \frac{ET}{\sqrt{1+T^2}}$

3. Zastosowanie metody Halleya do powyższego równania, postać funkcji iterującej:

$$T_{n+1} = T_n - \frac{2g(T_n)g'(T_n)}{2(g'(T_n))^2 - g''(T_n)g(T_n)}$$

gdzie: $P = \frac{p_G}{a}$, $Z = \frac{e_c |z_G|}{a}$, $E = e^2$, $e_c = \sqrt{1-e^2}$

$$\text{oraz } g'(T) = P - \frac{E}{(\sqrt{1+T^2})^3}, \quad g''(T) = \frac{3ET}{(\sqrt{1+T^2})^5}$$

Obliczenie (φ, h) :

$$\varphi = \text{sign}(z_G) \arctan\left(\frac{T}{e_c}\right)$$

$$h = \frac{e_c p_G + |z_G| T - b \sqrt{1+T^2}}{\sqrt{e_c^2 + T^2}}$$

Przedstawiony powyżej algorytm zapewnia bardzo wysoką dokładność przeliczenia współrzędnych nawet dla wysokości powyżej 36000 km (na tej wysokości znajdują się satelity geostacjonarne), wystarczy jedna iteracja, w parze z dokładnością idzie szybkość wykonania.

Zadanie wykonujemy na elipsoidzie GRS80 zgodnie ze schematem:

(φ, λ, h)	$\rightarrow$	(x, y, z)	$\rightarrow$	(φ, λ, h)
(dane)		(obliczone)		(obliczone)

dla punktu (50°03'Gr"; 22°34'Nr"; 4433.450m)

gdzie:

Gr – numer grupy

Nr – numer na liście

W końcowym zestawieniu podaj różnicę obliczonych wartości φ i h dla każdej z metod względem danych początkowych w postaci ułamka dziesiętnego z dokładnością 10^{-15} .

Konspekt przygotowany na podstawie:

Fukushima T., (1999): *Fast transform from geocentric to geodetic coordinates*, Journal of Geodesy, Vol. 73, pp. 603–610.

Fukushima T., (2006) *Transformation from Cartesian to geodetic coordinates accelerated by Halley's method*, Journal of Geodesy, Vol. 79, pp. 689–693.

Borkowski K., (1987) *Transformation of geocentric to geodetic coordinates without approximations*, Astrophysics and Space Science, Vol. 139, pp. 1–4.