

Zadanie 1. W zależności od wartości parametrów $k, m \in \mathbb{R}$ rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = m. \end{cases}$$

Zadanie 2. Rozwiąż układ równań w zależności od wartości parametru p :

$$\begin{cases} px + y + pz = 1 \\ x + y + z = 1 \\ (2 - p)x + (2 - p)y + z = 1 \\ pz + y + px = p^2. \end{cases}$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ dla których:

$$\text{lin}\{(p, 1, 2 - p, p), (1, 1, 2 - p, 1), (p, 1, 1, p), (1, 1, 1, p^2)\} \subset \text{lin}\{(p, 1, 2 - p, p), (1, 1, 2 - p, 1), (p, 1, 1, p)\}.$$

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametrów rzeczywistych k, m wektor $v = (k + 1, m, -k)$ da się wygenerować za pomocą wektorów $w_1 = (k - 1, -1, 2 - k)$, $w_2 = (m, m - 1, -2)$, $w_3 = (0, -1, k)$. Dla jakich k i m można to zrobić w sposób jednoznaczny?

Zadanie 4. W zależności od parametru $k \in \mathbb{R}$ podaj wymiar i wyznacz bazę przestrzeni:

$$V = \text{lin}\{(1, k, -1, 3), (0, -1, k, -1), (-1, k + 1, 0, 2), (-1, 2, 1, k - 1)\}.$$

Zadanie 5. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + py + 2z + 2s = -2 \\ 2x + py + 2z + ps = 0 \\ -2x - py - 3z + pt - 2s = 3 \\ -4x - (1 + p)y - z - 3t - 2s = -3. \end{cases}$$

W przypadku gdy układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów, wyznacz zbiór tych rozwiązań stosując metodę Gaussa. Uzasadnij dla jakich wartości parametru p wektor $(-2, 0, 3, -3)$ należy do $W = \text{lin}\{(2, 2, -2, -4), (p, p, -p, -1 - p), (2, 2, -3, -1), (0, 0, p, -3), (2, p, -2, -2)\}$.

Zadanie 6. Rozwiąż poniższy układ w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$. Dla tych wartości parametru p , dla których jest to układ Cramera, rozwiąż go wzorami Cramera. W pozostałych przypadkach wyznacz zbiór rozwiązań metodą Gaussa.

$$\begin{cases} 3x + z = 1 \\ px - py + z = -p \\ x + py + z = 3. \end{cases}$$

Określ rząd macierzy uzupełnionej tego układu w zależności od parametru p .