Zadanie 1. Sprawdź, czy poniższe odwzorowania są liniowe. Dla odwzorowań liniowych wyznacz $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, ich bazy i wymiary oraz macierze tych odwzorowań.

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (y - x + z, 3x - y - z, 2z + 3x)$,
(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z) = (x + y + 2, 2 + y - z, z + y, x - 2y)$,
(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x - y, x^2 - 2y, y^2 + 2x)$,
(4) $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_1$, $f((ax^2 + bx + c))(x) = (2a - b + 3c)x - a - 2b + c$,
(5) $f : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$, $(f(p))(x) = xp'(x + 1) - p(x + 1)$,
(6) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f(x) = Rez + Imz$,
(7) $f : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$,
(8) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$.

Zadanie 2. Dla poniższych odwzorowań liniowych wyznacz $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, ich bazy i wymiary.

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, a ponadto $f(e_1) = (2, -1, 1)$, $f(e_2) = (3, 1, -1)$. Czy f jest monomorfizmem lub epimorfizmem?
(2) $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$, a ponadto $f(3x + 1) = -x^2 + 4x - 2$, $f(x^2) = x^2 - 2$, $f(x^2 + x) = x - 3$,
(3) $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbf{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, a ponadto $f(x^2 - 2x + 1) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $f(x - 1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, $f(2x^2 + 2x - 1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$

Zadanie 3. Skonstruuj odwzorowanie liniowe:

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ wiedząc, że $\operatorname{Ker} f = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) : 2x = 3y = 6z\}$,
(2) $f : M_{2x2} \to \mathbb{R}^3$ wiedząc, że $\operatorname{Ker} f = \{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & t \end{bmatrix} : z, t \in \mathbb{R}\}$ oraz $f(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) = (1, 3, 3)$, $f(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) = (1, 1, -3)$.
(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(1, 2, 1) = (1, 1)$, $f(0, 1, -1) = (-2, 2)$ oraz $\operatorname{Ker} f = \{(t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Zadanie 4. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem liniowym. Udowodnij, że jeśli $e_1, \ldots, e_n$ są liniowo zależne, to $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ są liniowo zależne. Dla jakich odwzorowań mamy równoważność?

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem liniowym oraz $B = (e_1, \ldots, e_n)$ będzie bazą $\mathbb{R}^n$. Udowodnij:

(1) f jest iniekcją $\Rightarrow f[B] = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ jest układem liniowo niezależnym,
(2) f jest surjekcją $\Rightarrow \mathbb{R}^m = \operatorname{lin}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$,
(3) f jest bijekcją $\Rightarrow f[B]$ jest bazą $\mathbb{R}^m$.

Co można powiedzieć o m i n w każdym z powyższych przypadków?

Zadanie 6. Niech $B = (e_1, \ldots, e_n)$, $B' = (l_1, \ldots, l_n)$ będą dwoma różnymi bazami w $\mathbb{R}^n$ oraz $u = \alpha_1 e_1 + \ldots \alpha_n e_n$. Udowodnij, że odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takie, że $f(u) = \alpha_1 l_1 + \ldots \alpha_n l_n$ jest izomorfizmem.

Zadanie 7. Odwzorowanie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ jest zdefiniowane następująco:

$$f(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y, x + ay).$$

Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ odwzorowanie f jest monomorfizmem, a dla jakich - epimorfizmem? Znajdź macierz tego odwzorowania (w bazach kanonicznych).

Zadanie 8. Wykaż, że zbiór macierzy $H = \left\{\begin{bmatrix} -a & b \\ c & a \end{bmatrix}\right\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Znajdź wymiar i bazę B_1 tej podprzestrzeni. Wykaż, że odwzorowanie $f : H \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$ takie, że $f\left(\begin{bmatrix} -a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\right) = a - ib$ jest liniowe. Znajdź $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, ich bazy i wymiary. Czy f jest epimorfizmem lub monomorfizmem? Znajdź $M_f(B_1, B_2)$ gdzie B_2 jest dowolnie wybraną bazą w $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Zadanie 9. Niech $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ takie, że:

$$(f(p))(x) = -\frac{(x+1)^2}{2}p''(x) + (x+1)p'(x).$$

Wykaż, że f jest liniowe oraz $f \circ f = f$. Znajdź $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, ich bazy i wymiary. Sprawdź czy $\mathbb{R}[x]_2 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Zadanie 10. Odwzorowanie $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ jest zdefiniowane następująco:

$$f(ax^2 + bx + c) = (3a + 3b)x^2 + (b + c)x + (a + b + 2c).$$

Znajdź wymiar $\operatorname{Ker} f$ oraz $\operatorname{Im} f$. Sprawdź, czy odwzorowanie f jest odwracalne. Jeśli tak, podaj wartość odwzorowania odwrotnego dla wielomianu $4x^2 + x + 1$.

Zadanie 11. Odwzorowanie $F : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ jest zdefiniowane następująco dla $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$F(A) = AB,$$

gdzie $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Wyznacz wymiar i bazę $\operatorname{Ker} F$ oraz wymiar i bazę $\operatorname{Im} F$.

Zadanie 12. Niech V będzie przestrzenią wektorową. Udowodnij poniższe stwierdzenia lub podaj kontrprzykład:

(1) Jeśli $e_1, \dots, e_n$ są liniowo niezależne w V, to dowolny wektor e_i, $i = 1, \dots, n$ może być zapisany jako kombinacja liniowa pozostałych wektorów.
(2) Jeśli $e_1, \dots, e_n$ są liniowo niezależne w V oraz $v \neq e_i$ to $e_1, \dots, e_n, v$ są liniowo niezależne.
(3) Jeśli wektory $e_1, \dots, e_n$ rozpinają przestrzeń V oraz $v \neq e_i$ to $e_1, \dots, e_n, v$ także rozpina przestrzeń V.

Zadanie 13. Odwzorowanie $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}^2$ jest zdefiniowane następująco:

$$T(p(x)) = (p(0), p(1)).$$

Przyjmując $B = (1, x, x^2)$ jako bazę w $\mathbb{R}[x]_2$ oraz bazę kanoniczną B_e w $\mathbb{R}^2$ znajdź macierz odwzorowania f. Wyznacz $\operatorname{Ker} f$, podaj jego wymiar oraz bazę.