Teleinformatyka, rok I

1 ZESTAW ZADAŃ Z WZMW

1. Udowodnij, że w dowolnym grafie G istnieją dwa różne wierzchołki $x, y \in V(G)$ takie, że $d(x) = d(y)$.

2. Graf o 13 krawędziach ma po 3 wierzchołki stopnia 1, 2 i 3. Pozostałe wierzchołki są stopnia 4. Ile wierzchołków ma ten graf?

3. Zbadaj, które z wymienionych poniżej ciągów są ciągami stopni jakiegoś grafu prostego. Narysuj przykładowe grafy realizujące ciągi lub uzasadnij dlaczego jest to niemożliwe.
(4,4,4,3,2,1,1), (4,4,3,2,2,1), (4,4,3,2,1)

4. Dana jest macierz sąsiedztwa pewnego grafu G.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznacz stopnie wierzchołków grafu G oraz liczbę jego krawędzi. Wyznacz sąsiedztwo każdego z wierzchołków. Narysuj graf G.

5. Wyznacz macierz sąsiedztwa oraz macierz incydencji dla grafu $K_{2,3}$.

6. Podaj przykład dwóch grafów, które mają tę samą liczbę wierzchołków, realizują te same ciągi stopni, ale grafy nie są izomorficzne.

7. Narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy rzędu 4 (jest ich 11).

8. Znajdź graf rzędu 4 izomorficzny ze swoim dopełnieniem. Wypisz ten izomorfizm. Podobnie zrób dla grafu rzędu 5. Czy istnieją grafy rzędu 2 oraz 3 izomorficzne ze swoimi dopełnieniami?

9. Dany jest graf $G = (V, E)$, gdzie $V = \{\{i, j\} : \ i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, i \neq j\}$, przy czym
$$uv \in E \Leftrightarrow u \cap v = \emptyset.$$
Udowodnij, że G jest izomorficzny z grafem Petersena.

10. Przedstaw dopełnienie dwudzielnego grafu pełnego $K_{m,n}$.

11. Wykaż, że jeśli G jest niespójny, to $\overline{G}$ jest spójny.

12. Udowodnij, że każdy graf rzędu n o rozmiarze większym niż $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ jest spójny.

13. Pokaż, że jeśli $\delta(G) \geq 2$, to w grafie G istnieje cykl długości przynajmniej $\delta(G) + 1$.

14. Udowodnij, że graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera cykli nieparzystych.

15. ($*$) Niech G będzie grafem rzędu $n \geq 3$. Udowodnij indukcyjnie, że jeśli $\|G\| \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$, to w grafie G istnieje podgraf K_3.

    Podaj przykład grafu rzędu $n \geq 3$ mającego $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ krawędzi, który nie zawiera K_3.

16. Udowodnij, że w dowolnym turnieju nie może istnieć więcej niż jedno źródło i więcej niż jedno ujście.

17. Udowodnij indukcyjnie, że w każdym turnieju istnieje centrum, czyli taki wierzchołek, z którego można dojść do dowolnego innego ścieżką skierowaną długości nie większej niż 2.