

Automaty komórkowe

v. 2.71828182845904523536028

<http://home.agh.edu.pl/malarz/dyd/ak/>

Krzysztof Malarz

2 września 2019

Część I

Teoria

Klasyfikacja AK

- Po co?
 - AK = modele, czy też matematyczne realizacje procesów dynamicznych w dyskretnym czasie i dyskretnej przestrzeni.
 - Wspomnieliśmy już, że klasyfikacje AK — gdyby się powiodła — stała by się jednocześnie klasyfikacją wszystkich procesów dynamicznych.
- Jak?
 - Ewolucja sieci zależy od **reguł** i **stanu początkowego** sieci.
 - Wszystkie znane próby klasyfikacji próbują uniezależnić się od tej drugiej zależności.
- Do jakiej klasy zaliczyć dany automat? Problem ten dla AK pracujących na **nieskończonej sieci** jest nierozstrzygalny — ogólnego algorytmu nie ma!

Klasyfikacja na podstawie obserwacji

Klasyfikacja AK na podstawie obserwacji jest:

- trudna, bo czasochłonna i pamięciożerna,
- ale za to wiele wskazuje na to... że wysoce nieskuteczna.

Najstarsza, pierwsza — i najpopularniejsza — klasyfikacja AK pochodzi od Wolframa. Zgodnie z nią, AK podzielić można na cztery klasy:

- 1 AK prowadzące do jednorodnych konfiguracji sieci, w których stan wszystkich komórek jest taki sam i nie zmienia się w czasie.
- 2 AK prowadzące do nie zmieniających się lub periodycznych prostych konfiguracji.
- 3 AK prowadzące do konfiguracji chaotycznych.
- 4 AK prowadzące do złożonych konfiguracji lokalnych, często o długich czasach życia.

Klasyfikacja Wolframa

- AK pierwszych dwóch klas prowadzą do stałych konfiguracji.
- AK klasy trzeciej są niestabilne: małe zmiany konfiguracji początkowej mogą prowadzić do całkiem różnych ewolucji czasowych sieci — nawet **chaotycznych**; z pewnością więc nie nadają się do przechowywania informacji (i obliczeń).
- Natomiast dla AK z czwartej grupy istnieją konfiguracje sieci **blokujące** rozchodzenie się uszkodzeń. Stąd AK klasy czwartej uważa się za mogące wykonywać **obliczenia**.

Klasyfikacja Wolframa oparta jest na

- **długiej** obserwacji stanów sieci,
- przy **przypadkowo** dobranych konfiguracjach początkowych.

Przypadkowo dobrana oznacza w rzeczywistości **uśrednienie** po wielu konfiguracjach początkowych. Rodzi to podstawowe pytania:

- Jak typowe są wyniki naszych symulacji?
- Czy statystyka jest wystarczająco bogata?
- Czy czas obserwacji był dostatecznie długi?
- Co w przypadku automatów działających na **skończonej** sieci oznacza klasa III skoro za chaos uważamy **stałe zwiększanie** się różnic między stanami sieci?

- Problem Poincarego: powrót do tych samych punktów w przestrzeni fazowej.
- Granica termodynamiczna: przejście z rozmiarem układu do nieskończoności.
- Analogia do namagnesowania układów skończonych: ważna kolejność wykonywania przejść granicznych z $N \rightarrow \infty$ i $H \rightarrow 0$.
- Klasyfikując AK mamy podobną sytuację: też musimy wykonać dwa przejścia graniczne: $N \rightarrow \infty$ i $t \rightarrow \infty$.
- Jeśli najpierw wykonać drugie z nich — każdy automat okaże się periodyczny — i tego wyniku przejście do granicy termodynamicznej nie zmienia.

- Jeśli jednak najpierw wykonać $N \rightarrow \infty$, przyjmując **skończony** czas obserwacji, to możemy zaobserwować zachowania chaotyczne: mała zmiana konfiguracji początkowej sieci prowadzi do narastających w czasie modyfikacji kolejnych stanów układu.
- Uzasadnienie tej właśnie kolejności daje fizyka eksperymentalna.
- Najpopularniejszą miarą różnic między stanami sieci σ_1 i σ_2 jest **odległość Hamminga**:

$$d(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{i=1}^N |s_i(\sigma_1) - s_i(\sigma_2)|$$

gdzie s_i oznacza stan i -tej komórki w konfiguracji σ .

- Przykład: 32.

[K.Kułakowski, *Automaty komórkowe*, OEN AGH, Kraków 2000][1]

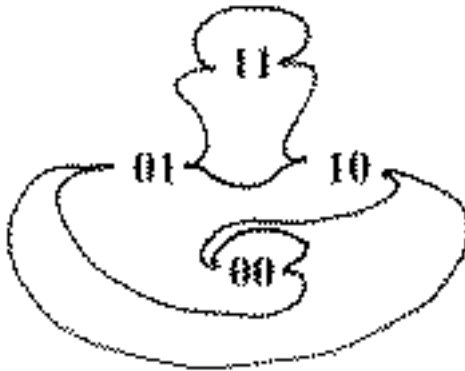
Diagramy de Bruijna

- Określamy diagram dla rodziny AK, np.: $(k, r) = (2, 1)$.
- Mamy dla niej cztery tzw. częściowe otoczenia (partial neighbourhoods):

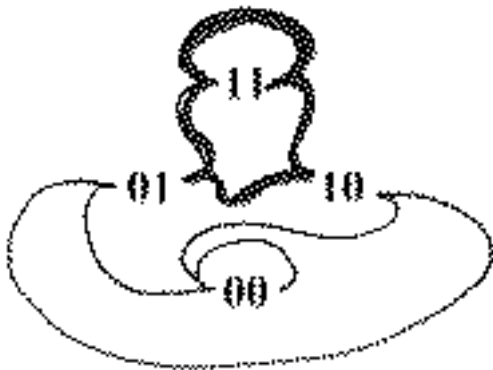
00 01 10 11

stanowiące wierzchołki diagramu.

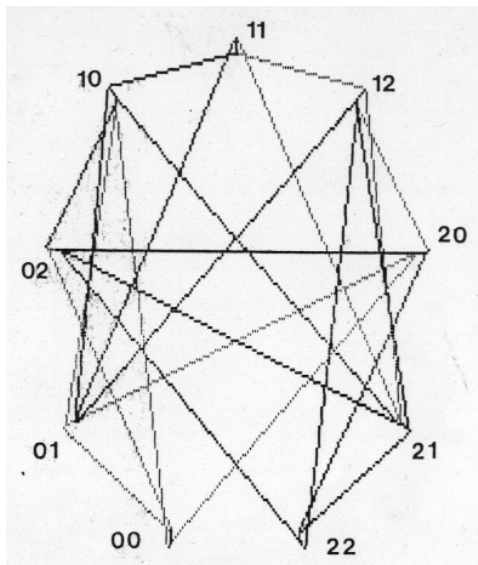
- Te wierzchołki, które mogą sąsiadować, są połączone krawędziami (8 konfiguracji otoczenia dla $(2, 1)$ — więc i 8 krawędzi).

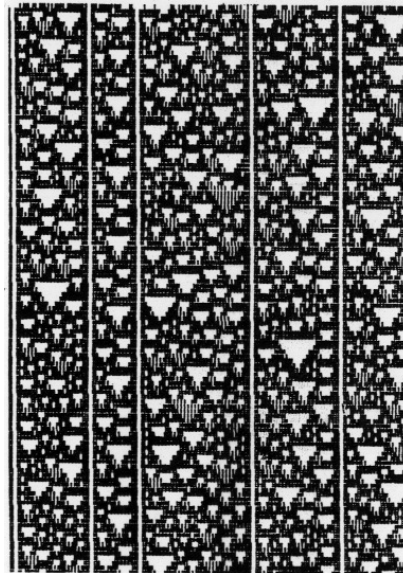


- Diagram może również nieść informację o danym automacie: Jeśli $xyz \rightarrow y$ to krawędź $xy - yz$ pogrubiamy.



- Jeśli na diagramie zobaczymy **wzmocnioną pętlę**, to pewna konfiguracja jest stabilna i granica rozchodzących się uszkodzeń nie może jej pokonać. Wtedy automat nie może być chaotyczny! Z pewnością **nie** jest on AK z klasy trzeciej.
- Np. dla AK, którego diagram przedstawiono powyżej, mamy:
 - wzmocnioną krawędź 11-11, więc $111 \rightarrow 1$,
 - wzmocnioną krawędź 01-11, więc $011 \rightarrow 1$,
 - wzmocnioną krawędź 11-10, więc $110 \rightarrow 1$,
 - wzmocnioną krawędź 01-10, więc $010 \rightarrow 1$,
 - a więc "1" jest **stabilna**: $*1* \rightarrow 1$.





Klasyfikacja na podstawie reguł

- Chcielibyśmy skutecznie klasyfikować AK na podstawie formalnego badania ich reguł.
- Próbujemy więc zdefiniować (jeden lub kilka) parametr, którego wartość pozwoliłaby określić przynależność AK do tej czy innej klasy.
- Na ogół parametry te są definiowane w sposób probabilistyczny — tj. z użyciem rachunku prawdopodobieństwa.

Metody średniego pola

Metody średniego pola = metody zaniedbujące korelacje między komórkami.

Aktywność AK

- Najprostszym takim parametrem jest $\lambda =$ względna ilość jedynek w tabeli definiującej regułę F automatu. Np. dla automatu 22_{dec} , tj.:

111	110	101	100	011	010	001	000
0	0	0	1	0	1	1	0

zwanego jednowymiarowym *Lifem*. Jak wynika z reguły $\lambda = 3/8 = 0.375$.

- Gdyby automat był probabilistyczny, aktywność można by określać jako prawdopodobieństwo otrzymania "1" i z takim właśnie prawdopodobieństwem AK generowałby "1" — np. automat 22_{dec} zachowuje w czasie średnią ilość "1" o koncentracji $3/8$.

- Traktowanie jednak **deterministycznego** AK za pomocą pojęć **probabilistycznych** jest równoznaczne z zaniedbaniem informacji o dalekozasięgowych korelacjach, czyli o tym co jest w AK najbardziej interesujące.
- Można by więc spodziewać się, że **wszystkie** metody probabilistyczne okażą się nieskuteczne.
- Jednak, poza nimi i poznanymi wcześniej metodami opartymi na obserwacji, nie dysponujemy żadnymi innymi.

Stabilność rozwiązań równania iteracyjnego

- Rozważmy równanie iteracyjne typu $x_{n+1} = G(x_n)$, które przy zadanej wartości początkowej x_0 pozwala generować kolejne wartości x_n i $n \in \mathbb{N}$.
- Wskaźnik n można traktować jak dyskretny czas.
- Punkty spełniające równość $x^* = G(x^*)$ nazywamy **punktami stałymi**.
- Pytanie o stabilność punktu stałego, jest pytaniem, czy jeśli punkt x_n przyjmuje wartość bliską punktowi stałemu x^* to kolejne wyrazy $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots$ będą coraz bliższe x^* , czy też coraz dalsze?

- Innymi słowy, czy małe odchylenie od punktu stałego jest wzmacniane czy osłabiane przez ewolucję czasową?
- Jeżeli jest wzmacniane — to punkt stały jest **niestabilny**.
- $\delta_n = x_n - x^*$ jest n -tym odchyleniem od punktu stałego.
- $$G(x) = G(x^*) + G'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}G''(x^*)(x - x^*)^2 + \dots$$
- $$x_{n+1} - x^* = G(x_n) - x^* \approx G(x^*) + G'(x^*)(x_n - x^*) - x^* = (x_n - x^*)G'(x^*)$$
- $$\delta_{n+1} = G'(x^*) \cdot \delta_n$$
- Jeśli więc $|G'(x^*)| < 1$, to punkt stały x^* jest **stabilny**.

Równania ewolucji

Metoda uproszczonego równania ewolucji stosuje się do AK, które zachowują stan próżni ($000 \rightarrow 0$).

- Oznaczmy częstość zer w czasie t przez ν_t .
- Równanie iteracyjne ma postać

$$\nu_{t+1} = \nu_t^3 + (1 - \nu_t^3)(1 - \kappa) = G(\nu_t)$$

gdzie κ jest zrenormalizowaną aktywnością, bez uwzględnienia stanu próżni (który na pewno zwróci zero).

- Np. dla 22_{dec} $\kappa = 3/7$.
- Konfiguracje inne niż 000 zdarzają się z częstością $1 - \nu_t^3$ a prawdopodobieństwo, że zwrócą 0 wynosi $1 - \kappa$.

- Punkty stałe równania ewolucji dla 22_{dec} znajdujemy rozwiązując równanie:

$$\nu = \nu^3 + (1 - \nu^3)(1 - 3/7)$$

- Pierwszy z nich $\nu_1^* = 1$ jest niestabilny $G'(\nu_1^*) = 9/7 > 1$.
- Drugi $\nu_2^* = \frac{1}{6}\sqrt{57} - \frac{1}{2}$ jest stabilny $|G'(\nu_2^*)| < 1$.
- Oznacza to, że AK 22_{dec} zachowuje średnią koncentrację "1" $\lambda^* = 1 - \nu^* \approx 0.242$.

- Dokładniejsze podejście polega na wyseparowaniu w funkcji G konfiguracji o różnych ilościach zer:

$$\nu_{t+1} = \sum_{i=0}^3 b_i \nu_t^i (1 - \nu_t)^{3-i},$$

gdzie b_i jest ilością konfiguracji otoczenia o i zerach, które dają "0".

- Np. dla 22_{dec} b_i są następujące:
 - $b_3 = 1$ — zachowanie stanu próżni,
 - $b_2 = 0$ — każdy stan z dwoma "0" daje "1",
 - $b_1 = 3$ — każdy stan z dwoma "1" daje "0",
 - $b_0 = 1$ — trzy "1" dają "0".

- Analogiczne równanie można napisać dla koncentracji “1”.

- Dla 22_{dec} :

$$\lambda_{t+1} = 3\lambda_t(1 - \lambda_t)^2$$

co oznacza, że “1” otrzymujemy, gdy w otoczeniu jest jedna “1” i dwa “0”, a takie konfiguracje są trzy.

- Punkty stałe to $\lambda^* = 0$ (zachowany stan próżni — niestabilny) oraz $\lambda^* = 1 - 1/\sqrt{3} \approx 0.423$ — stabilny.
- W tym przybliżeniu średnia koncentracja “1” którą zachowuje automat wynosi więc ok. 42%.
- Symulacja komputerowa dla 22_{dec} pozwala szacować λ na ok. 35%.

konfiguracja

 λ

11100101001100011111001110100011101010100101110110010	0.499
00011101110001010000110000110000110100000001011110000001111	0.374
001000000010101100010010001000100001100000100001000010000	0.344
01110000110000010111111011101111010010000100100011100011000	0.384
10001000100100001100000000000000000011110011111101000101000101	0.361
11011101111100100100000000000000001000011000000010110101100	0.356
000000000000111111000000000000001100010010000010000000000010	0.355
000000000000100000010000000000000010001011111000110000000011	0.361
100000000011100001100000000001101000000010001000000001000	0.356
1100000000100010001000000000100000010000010110110000011100	0.352
001000000110110110111000000110000110001000000001000100010	0.355
01110000100000000000000100001000100100010111000000111011011	0.356
100010011000000000000110001101111101000010000100000000000	0.355
11011100010000000000010001010000000000001001100011000000000	0.353
000000010110000000001110110100000000001110001010001000000011	0.354
000000100001000000010000000010000000000000010000101101100000100	0.354
00000100100110000011000000110000000110011000000000010001110	0.354
0000111111000100010001000001000100000100010010000000011010000	0.353
000100000010111011011000110110001110100111000001000011001	0.353
001110000100000000000001000000010000011000010000111001111	0.353
101001000100100000000010110000110110010001001100100011111000	0.352
11101110111100000001000001000100000111011100011110100000100	0.352
000000000000010000011100011101100010000000010100000110001111	0.353
000000000000111000010001010000000101100000010110001001010000	0.352
00000000000010001001101010110000011000010000010000010111000	0.351
000000000011101110000000000100010011100011100010000000000100	0.352
00000000010000000100000011011111110001010001010010000001110	0.352
1000000011000000110000010000000000010101101011110000010001	0.352
010000010010000100010001110000000011000000000000001000111011	0.352
11100001101100110110100010000000100100000000000011101000000	0.352
000100100000010000000101110000111110000000000010001100000	0.351
00111110000010100000010000001000100000010000000001110010010000	0.352
010000010001111000011000011101000011000001000000001111111000	0.353
11100001101000000100001000000001000100000111010000000100	0.352
00010010000100001101101101100000100000100000100001000001111	0.350
10111110010010010000000000000010001000000000101100100100010000	0.352
0000000011111111000000000001110110000000011000011111110111000	0.352
00000001000000000010000000010000000100000100100100000000000100	0.352
0000001110000000011000000110000011000011111110000000001110	0.351
0000010001000000100010000010001000100010000000001000000010001	0.351
0000111011000001110110001110110111110000000110000011011	0.350
00010000001001000000101000000000000000000000000000000000000	0.351
00111000010000001101000000000000000000000000000000000000000	0.351
1100010001000001000100000100000000000000000000000010001010000000000000	0.352
00101110110110000111011100011100000000000000000000000000000	0.351

$$\langle \lambda \rangle \approx 0.353$$

Teoria struktury lokalnej

Zastępuje ona ewolucję konfiguracji sieci zgodną z reguła deterministyczną AK poprzez ewolucję rozkładu prawdopodobieństwa lokalnych konfiguracji.

Podstawowym założeniem teorii jest zaniedbanie korelacji między odpowiednio dalekimi komórkami sieci (metody średniopolowe zaniedbują korelacje w ogóle).

- Dla danej konfiguracji $\sigma(n)$ o rozmiarze n znajdujemy wszystkie konfiguracje $\xi(m)$, które ją produkują zgodnie z deterministycznymi regułami AK ($m = n + 2r$).
- Znając $P_n(\sigma)$ i korzystając z formuły Bayesa na prawdopodobieństwo warunkowe, obliczamy rozkład prawdopodobieństwa $P_m(\xi)$.

- Np. dla AK 1D $P_{n+1}(\xi)$ konfiguracji lokalnej $\xi(n+1)$, która powstała z konfiguracji $\sigma(n)$ przez dołączenie do niej z prawej strony jednej komórki w stanie s , otrzymujemy ze wzoru:

$$\frac{P_{n+1}(\xi)}{P_n(\sigma)} = \frac{P_n(L\xi)}{P_{n-1}(L\sigma)}$$

gdzie $L\pi$ jest konfiguracją otrzymaną z konfiguracji π przez odjęcie z lewej strony jednej komórki.

- Obliczamy zmodyfikowane prawdopodobieństwo $P_n(\sigma)$ konfiguracji σ , sumując prawdopodobieństwa $P_m(\xi)$ wszystkich konfiguracji ξ , które ją produkowały.

Kolejne powtarzanie sekwencji tych kroków powinno doprowadzić do ustalenia się pewnego rozkładu prawdopodobieństwa $P_n(\sigma)$, którego dalsze obliczenia już nie będą modyfikowały.

Przewidywania teorii struktury lokalnej okazały się zgodne z wynikami obliczeń deterministycznych jedynie dla niektórych AK, spełniających określone własności....

[H.A.Gutowitz et al, *Physica* **D28** (1987) 18][2]

Szybkość rozprzestrzeniania się różnic

- Wyobraźmy sobie dwie konfiguracje początkowe jednowymiarowej sieci:

$$a = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$$

$$b = (\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots)$$

takie, że $a_i = b_i$ dla $i < 0$, $a_0 \neq b_0$, oraz b_i losowane niezależnie od a_i dla $i > 0$.

- Różnica w czasie t :

$$\delta_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a_i(t) = b_i(t), \\ 1 & \text{gdy } a_i(t) \neq b_i(t). \end{cases}$$

- Położenie frontu $i_f(t)$ określa się jako $\min\{i : \delta_i(t) = 1\}$.

- Szybkość rozprzestrzeniania się różnic (w lewo):

$$\gamma_L = \lim_{t \rightarrow \infty, \tau \rightarrow \infty, t/\tau \rightarrow 0} \frac{i(\tau) - i(\tau + t)}{t}$$

, o ile ta granica oczywiście istnieje.

Analogicznie definiuje się szybkość rozprzestrzeniania się różnic w prawo γ_P .

Całkowita szybkość $\gamma = \gamma_L + \gamma_P$. Taki pomiar γ powinien być przeprowadzony dla dużej sieci i możliwie wielu stanów początkowych.

- Maksymalna γ_L i γ_P wynosi r — zasięg AK. Maksymalna $\gamma = 2r$ — zazwyczaj jednak żadna z γ nie osiąga wartości maksymalnej.
- Niech λ będzie prawdopodobieństwem otrzymania wyniku różnego od “0”.

- Wybrane w sposób przypadkowy dwie konfiguracje $2r+1$ liczb dadzą:
 - to samo z prawdopodobieństwem $P_{ts} = \lambda^2 + (1 - \lambda)^2$,
 - a co innego z prawdopodobieństwem. $1 - P_{ts} = 2\lambda(1 - \lambda)$
- Prawdopodobieństwo, że $\gamma_L = r$ wynosi:

$$P \left(\begin{array}{l} a_{-r}, a_{-r+1}, \dots, a_{r-1}, 1 \\ a_{-r}, a_{-r+1}, \dots, a_{r-1}, 0 \end{array} \rightarrow \text{co innego} \right) = 1 - P_{ts}$$

- Wkład takiego przypadku do γ_L wynosi $r(1 - P_{ts})$.

- Prawdopodobieństwo, że $\gamma_L = r - 1$ wynosi:

$$P \left(\begin{array}{c} a_{-r}, a_{-r+1}, \dots, a_{r-1}, 1 \\ a_{-r}, a_{-r+1}, \dots, a_{r-1}, 0 \end{array} \rightarrow \text{to samo} \right) = P_{ts}$$

i

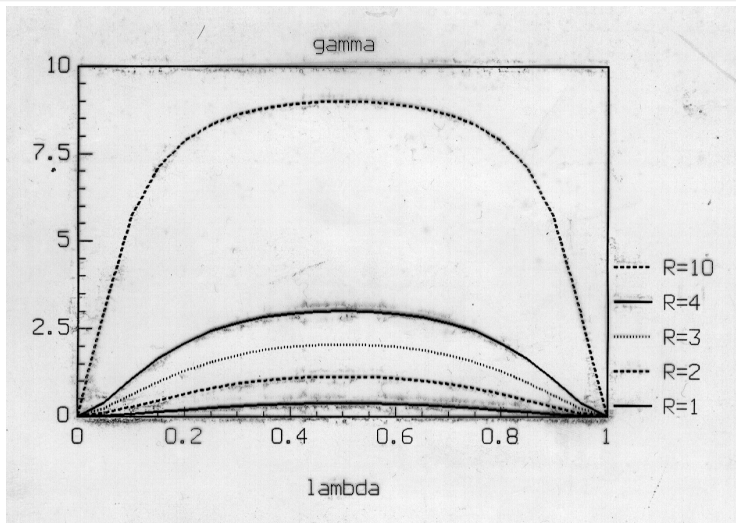
$$P \left(\begin{array}{c} a_{-r}, a_{-r+1}, \dots, a_{r-2}, 1, a_r \\ a_{-r}, a_{-r+1}, \dots, a_{r-2}, 0, a_r \end{array} \rightarrow \text{co innego} \right) = 1 - P_{ts}$$

, czyli $P_{ts}(1 - P_{ts})$.

- Wkład takiego przypadku do γ_L wynosi $(r - 1)P_{ts}(1 - P_{ts})$.
- Sumując wkłady od wszystkich prędkości $0 \dots r$:

$$\gamma_L = \sum_{i=0}^r (r - i) P_{ts}^i (1 - P_{ts}) = \dots$$

- Dla $\gamma > 0$ automat uważa się za chaotyczny.
- Aktywność λ jest związany z klasyfikacją Wolframa:
 - $\lambda \rightarrow 0$ — AK jest na ogół klasy I lub II,
 - gdy $\lambda \rightarrow 0.5$ AK najprawdopodobniej należy do klasy III,
 - trudny do określenia obszar przejściowy między klasami II a III zajmują AK IV klasy.
- Obszar przejścia fazowego między klasami AK możemy badać przez $\gamma(\lambda) = 0$.
- Równanie na γ_L pokazuje, że $\gamma_L = 0$ **tylko** dla $\lambda = 0$ i $\lambda = 1$.



- Oznacza to, że w/g metod probabilistycznych prawie wszystkie AK są chaotyczne...

Literatura

- [1] K.Kułakowski. *Automaty Komórkowe*. Kraków: OEN AGH, 2000.
- [2] H.A.Gutowitz et al. W: *Physica D28* (1987), s. 18.