

Automaty komórkowe

[http://home.agh.edu.pl/malarz/dyd/ak/
v. 2.718281828459045235360287](http://home.agh.edu.pl/malarz/dyd/ak/v.2.718281828459045235360287)

Definicje i inne kłamstwa

Krzysztof Malarz

2 maja 2024

Terry Pratchett, *Panowie i damy*, Prószyński i S-ka (Warszawa 2002)

Elfy są przedziwne. Budzą zdziwienie.

Elfy są cudowne. Sprawiają cuda.

Elfy są fantastyczne. Tworzą fantazje.

Elfy są urocze. Rzucają urok.

Elfy są czarowne. Splatają czary.

Ich uroda powala. Strzałą.

Kłopot ze słowami polega na tym, że ich znaczenie może się wić jak wąż. A jeśli ktoś chce znaleźć węże, powinien ich szukać za słowami, które zmieniły swój sens.

Nikt nigdy nie powiedział, że elfy są miłe.

Elfy są złe.

Definicje i inne kłamstwa I

Deterministyczny automat komórkowy

jest pojęciem matematycznym definiowanym poprzez:

- **sieć** komórek $\{i\}$ D -wymiarowej przestrzeni;
- zbiór $\{s_i\}$ **stanów** pojedynczej komórki — zwykle ten sam dla wszystkich komórek i k -elementowy;
- **regułę** F określającą stan komórki w chwili $t + 1$ w zależności od stanu w chwili t tej komórki i komórek ją otaczających:

$$s_i(t + 1) = F(\{s_j(t)\}), \text{ gdzie } j \in O(i)$$

i $O(i)$ jest otoczeniem i -tej komórki.

Definicje i inne kłamstwa II

Do najpopularniejszych otoczeń na sieci kwadratowej należy zaliczyć otoczenie von Neumanna (1+4) i Moore'a (1+8).

Jeśli ponadto funkcja F zależy od zmiennej losowej, to automat nazywamy **probabilistycznym automatem komórkowym**.

„Game of Life” Conwaya

- Automat „Game of Life” [1] jest zdefiniowany na **dwuwymiarowej sieci kwadratowej**, a więc $D = 2$.
- Zbiór stanów każdej komórki zawiera tylko dwa elementy ($k = 2$), a mianowicie „1” i „0”. Inaczej mówiąc, komórka jest „żywa” lub „martwa”. Otoczeniem i -tej komórki w automacie *Life* są wszystkie komórki z nią sąsiadujące, a więc stykające się z nią krawędziami lub rogami (otoczenie Moore’a).
- Reguła tego automatu jest następująca:
 - jeśli w otoczeniu komórki (nie licząc jej samej) są w czasie t trzy komórki żywe, to w czasie $(t + 1)$ ta komórka jest żywa,
 - jeżeli w jej otoczeniu w czasie t są dwie komórki żywe, a ona sama również jest żywa, to pozostaje żywa również w czasie $t + 1$,
 - w pozostałych przypadkach jest ona martwa w czasie $t + 1$.
- *Life* jest AK deterministycznym.

Najprostsza notacja

- Jak widać, ważne parametry AK to:
 - wymiar sieci D ,
 - ilość stanów pojedynczej komórki k ,
 - oraz otoczenie.
- Często używanym parametrem jest promień r otoczenia. Dla automatu *Life* $r = 1$; argumentem funkcji F są tylko najbliżsi sąsiedzi danej komórki.
- Często używaną notacją dla określenia całej rodziny automatów jest podanie dwóch liczb: (k, r) . W tej notacji automat *Life* jest zapisany jako $(2,1)$.
- Notacja ta nie jest precyzyjna: nie podaje wymiaru sieci, w związku z czym nie musi być jasne, czy np. dla automatu dwuwymiarowego otoczenie jest otoczeniem von Neumanna czy Moore'a. Niemniej często jej się używa zwłaszcza, gdy chodzi o automaty jednowymiarowe.

Elementarne AK I

- Najdokładniej zbadaną rodziną automatów są jednowymiarowe ($D = 1$) automaty deterministyczne o dwóch stanach komórki ($k = 2$) i otoczeniu składającym się z najbliższych sąsiadów ($r = 1$) — zgodnie z najprostszą notacją te automaty oznaczamy jako $(2,1)$.
- Argumentem funkcji F jest stan $2r + 1 = 3$ komórek, każda z nich może być w $k = 2$ stanach — funkcja F musi być więc określona dla $2^3 = 8$ różnych konfiguracji. Dla każdej z nich funkcja F może przyjmować $k = 2$ wartości. Można ją więc określić na $2^8 = 256$ sposobów.
- Za Wolframem te 256 jednowymiarowych AK nazywamy **elementarnymi**.

Elementarne AK II

- Często określa się AK elementarny, podając wartości funkcji F stanów otoczenia w następującej kolejności:

111 110 101 100 011 010 001 000

- Do zdefiniowania reguły wystarczy więc podać ciąg ośmiu liczb „0” i „1” — tworzących w zapisie binarnym kolejny numer automatu elementarnego
- Np. automat $90_{\text{dec}} = 1011010_{\text{bin}}$ to automat o regule:

111	110	101	100	011	010	001	000
0	1	0	1	1	0	1	0

Elementarne AK III

- Między nami mówiąc 90_{dec} jest równoważny działaniu **XOR** na stanach sąsiadów komórki centralnej — jakby tego jeszcze było mało, to z jednej komórki „1” w morzu „0” generuje on fraktal: dywan Sierpińskiego...

Legalne AK

- Wśród AK elementarnych szczególne miejsce według Wolframa zajmują tzw. AK **legalne**, które:
 - zachowują stan próżni (quiescent state) $000 \rightarrow 0$, a więc nie generują drażniących oscylacji,
 - oraz wykazują symetrię: $F(001) = F(100)$ i $F(110) = F(011)$,

co daje $2^5 = 32$ legalne AK o regule typu:

111	110	101	100	011	010	001	000
α	β	γ	δ	β	ε	δ	0

Automaty głoszące I

- Jeszcze mocniejszym żądaniem jest ograniczenie reguł do tzw. AK **głoszących** (liczących) dla których istotna jest tylko ilość „1” w otoczeniu:

111	110	101	100	011	010	001	000
α	β	β	γ	β	γ	γ	δ

- Tych automatów (nawet wraz z tymi które nie zachowują stanu próżni) jest tylko $2^4 = 16$.
- Sposób zapisu reguł takich automatów polega na
 - podaniu litery symbolizującej otoczenie: D=2, T=3, Q=4, H=8 i C=center,
 - oraz liczby, która oznacza ilość „1” w otoczeniu komórki, aby wartość reguły była „1”.

Automaty głoszące II

- W tej konwencji otoczenie von Neumanna zapisuje się jako $Q+C=V$, zaś otoczenie Moore'a jako $H+C=M$.
- Np. dwuwymiarowy AK, który zwraca „1” wtedy gdy wśród najbliższych sąsiadów dwie komórki mają wartość „1” nosi nazwę Q2.
- Można też wyróżniać pojedyncze komórki: N, E, S, W.
- Inne notacje pozwalające kodować reguły automatu w formie ich nazw raczej trudno się przyjmują...

- [1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. New York: Academic, 1982.