Automaty komórkowe

http://home.agh.edu.pl/malarz/dyd/ak/

v. 2.71828182845904523536028 7

Zastosowania w socjofizyce

Krzysztof Malarz

2 maja 2024

Terry Pratchett, *Straż! Straż!* Prószyński i S-ka (Warszawa 1999)

Patrycjusz nie lubił słowa „dyktator". Urażało go. Nigdy nikomu nie mówił co ma robić. Nie musiał — to właśnie było najpiękniejsze. Spora część jego pracy polegała na takim zaaranżowaniu spraw, by aktualny stan trwał nadal.

[...]

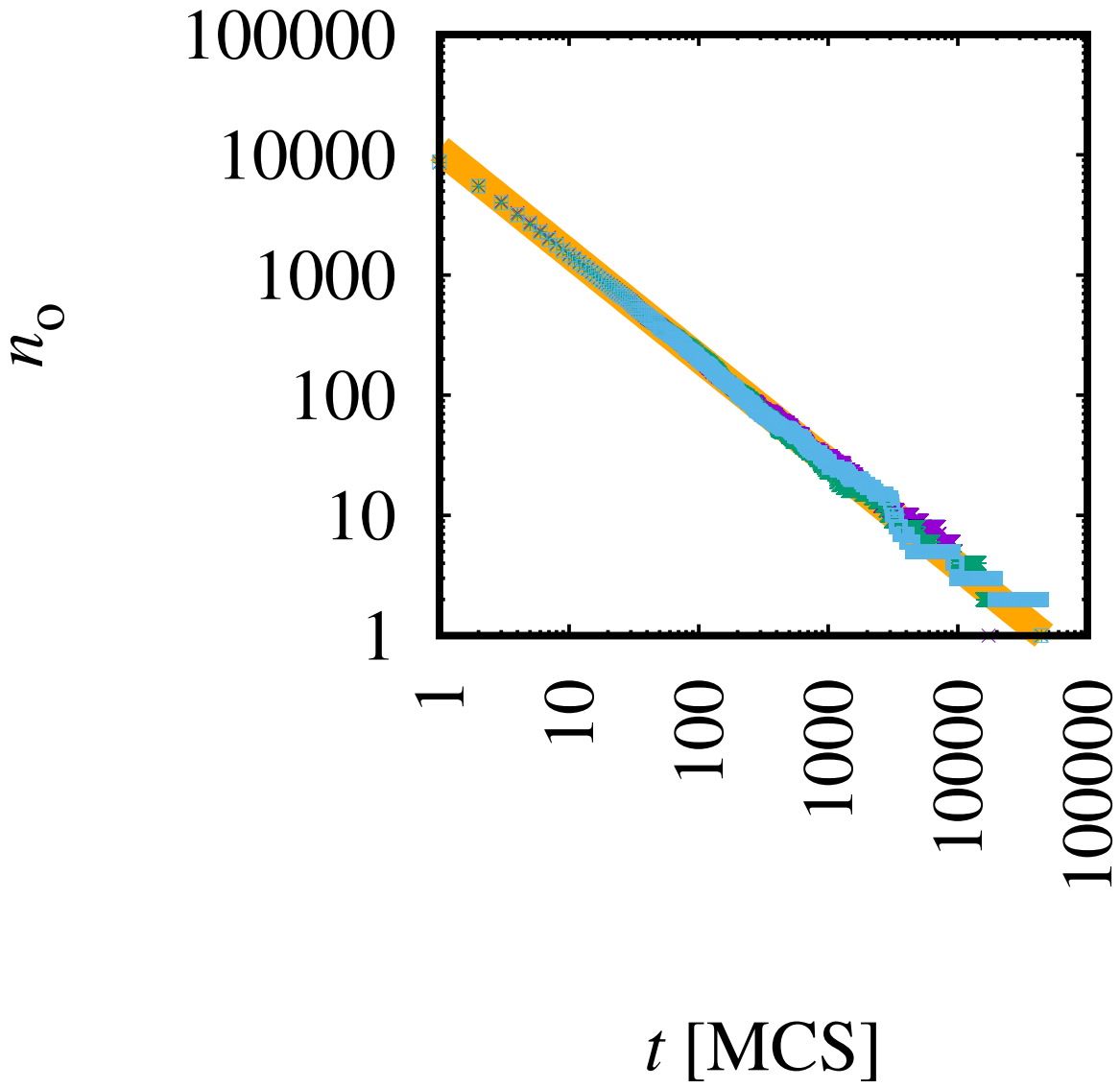
Natura ludzka, zwykł powtarzać Patrycjusz, to wspaniała rzecz. Kiedy już się odkryje, gdzie ma odpowiednie dźwignie.

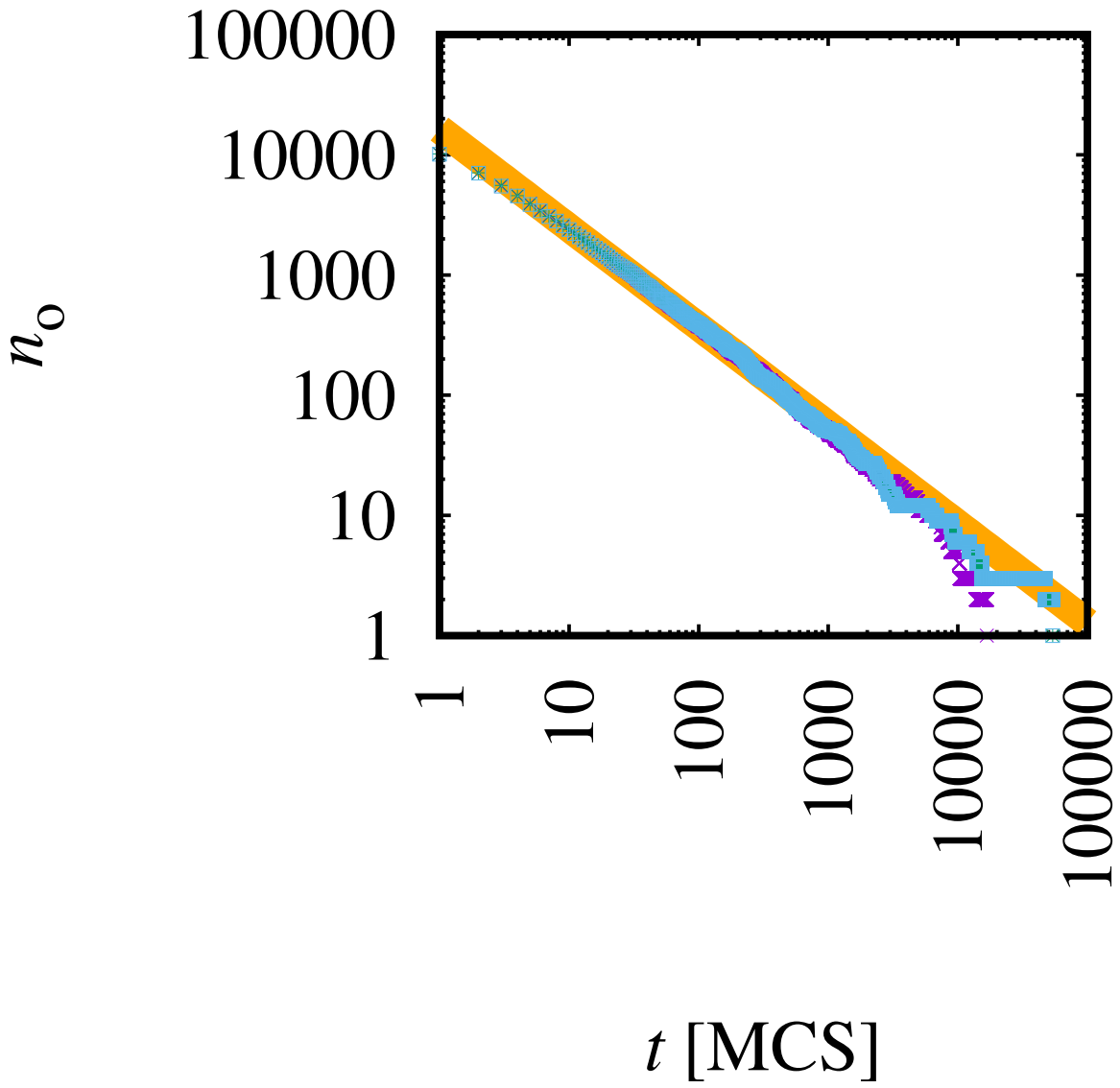
Wprowadzenie I

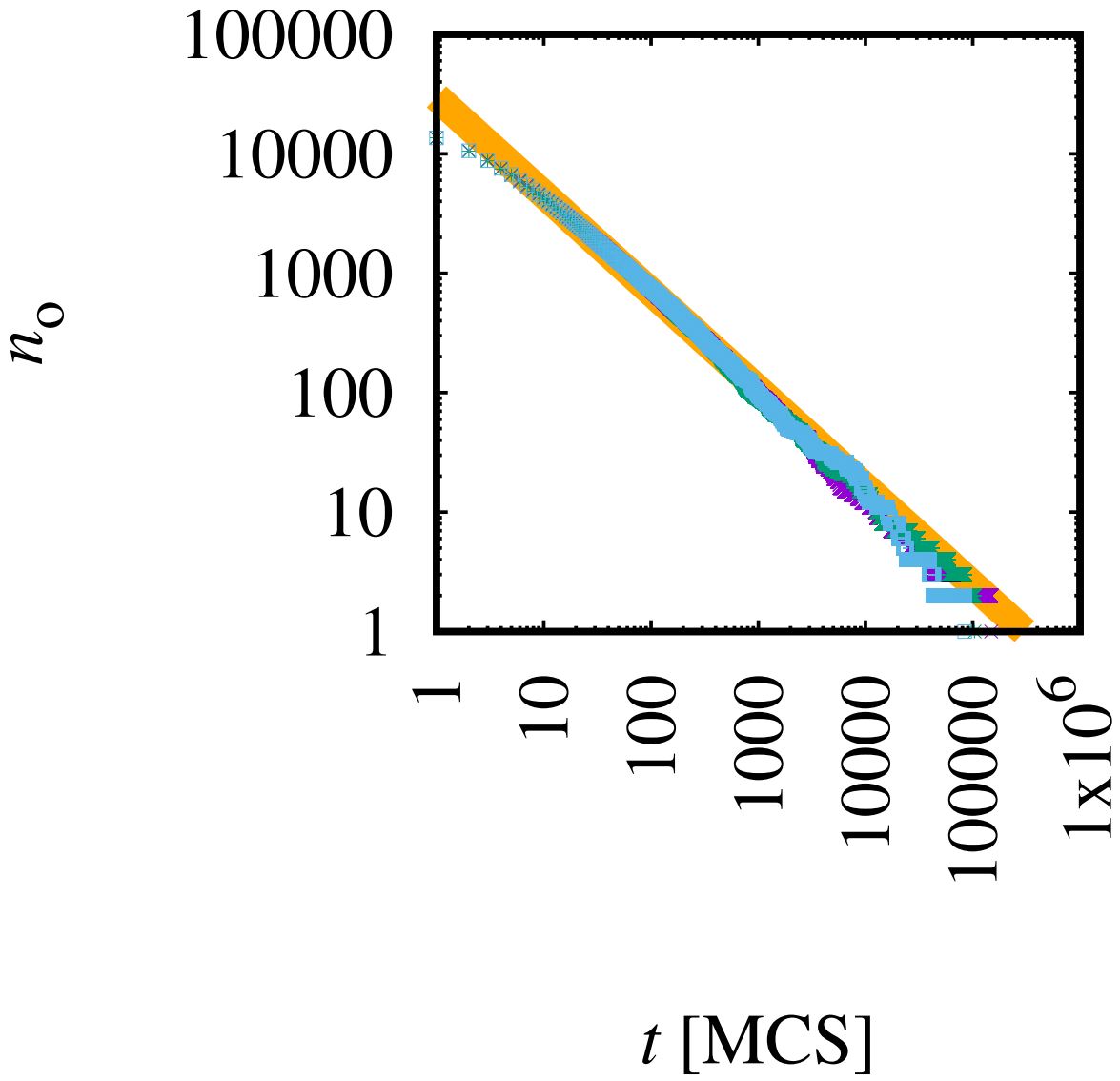
- Ilościowy opis procesów socjologicznych i ekonomicznych metodami fizyki statystycznej [1].
- Z perspektywy nauk społecznych i ekonomicznych oczywiście należy obawiać się zbytniego uproszczenia skomplikowanych procesów jakie spotykamy w prostych „mechanicznych" modelach.
- Proces formowania opinii publicznej traktowany jako zjawisko kolektywne.
- Dwie alternatywne drogi podejścia:
  - „makroskopowy": poprzez równania fundamentalne na pewne globalne (średnie) parametry opisujące populację,
  - „mikroskopowy": poprzez standardowe metody fizyki statystycznej (a więc też probabilistyczne AK).

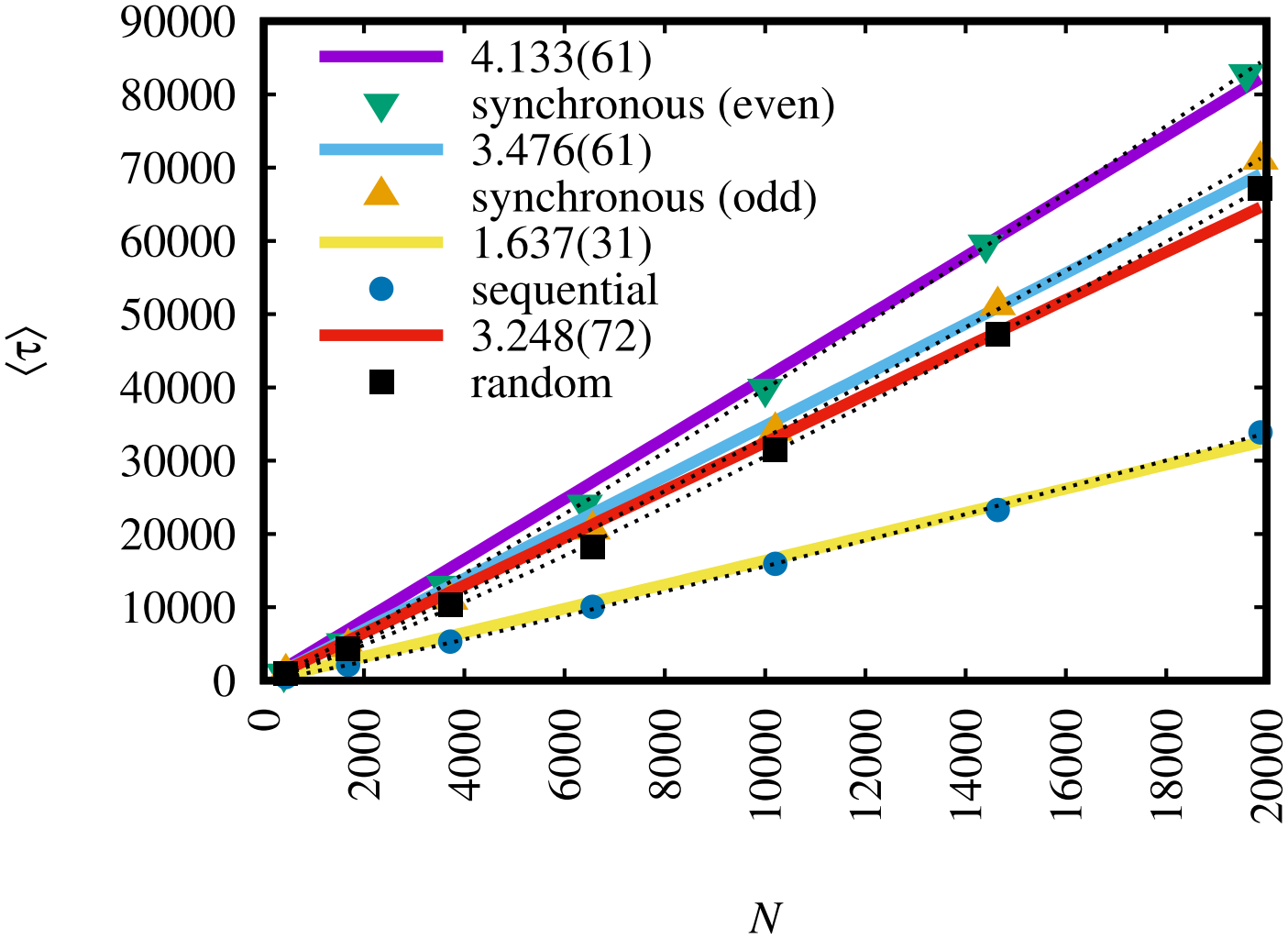
Model wyborcy I

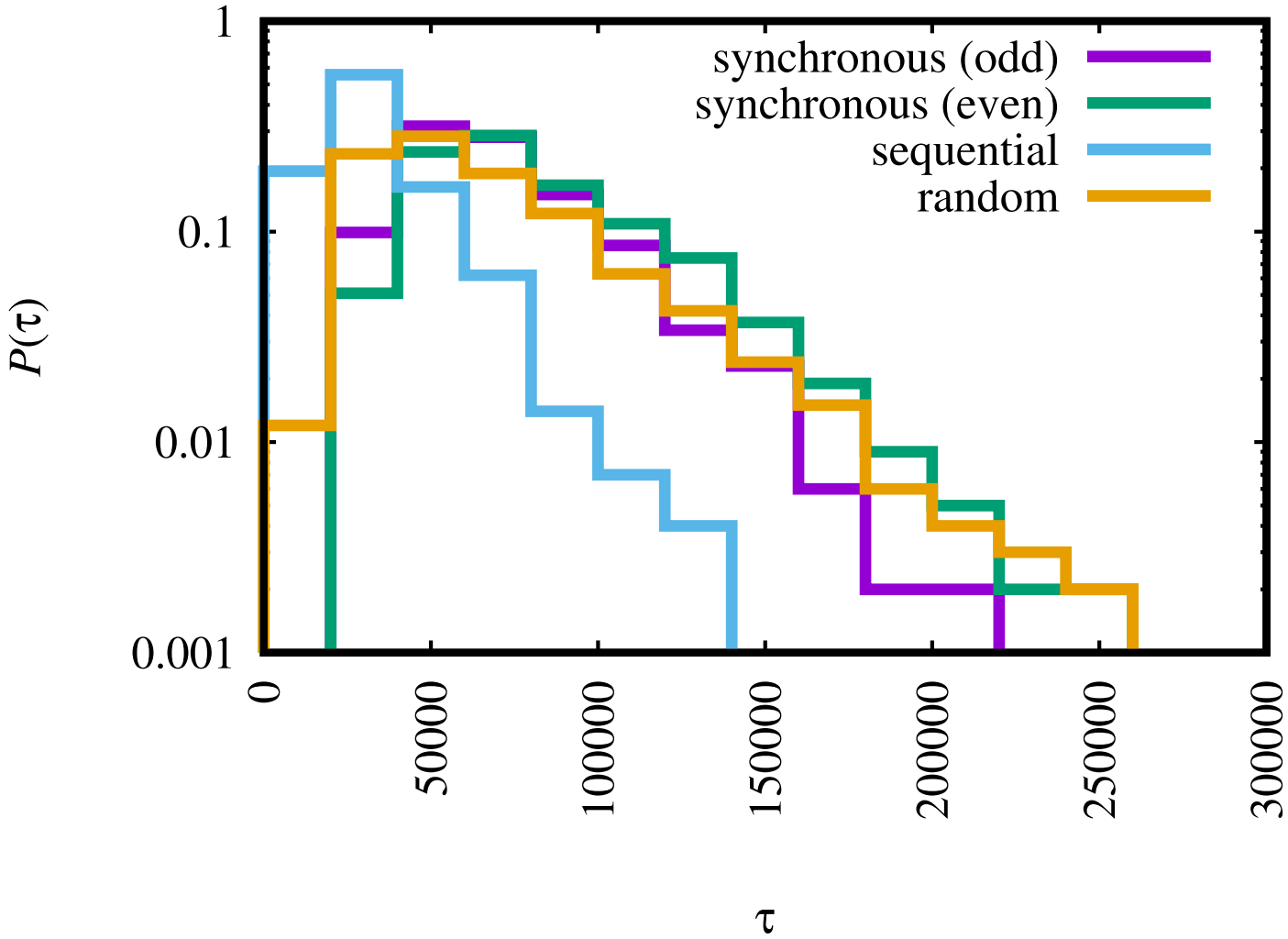
W modelu wyborcy [2, 3] (patrz np. [4–7] dla najnowszych prac) aktor naśladuje opinię swojego losowo wybranego sąsiada z jego/jej sąsiedztwa. Kiedy liczba takich opinii jest skończona, wybór najpopularniej w sąsiedztwie staje się najbardziej prawdopodobny, a zatem z socjologicznego punktu widzenia u podstaw modelu możemy założyć *teorię konformizmu*.
W przypadku modelu wyborcy układ dąży do stanu *konsensusu*. Początkowo, każdy z aktorów ma swoją własną opinię ($n_o = L^2$). Kolejne rysunki pokazują zmiany liczby opinii n_o dostępnych w układzie dla kolejno trzech różnych sposobów uaktualniania stanów automatu: sekwencyjnego, przypadkowego i synchronicznego [8].


100000
10000
1000
100
10
1
n_o
1
10
100
1000
10000
100000
t [MCS]


100000
10000
1000
100
10
1
n_o
1
10
100
1000
10000
100000
t [MCS]


100000
10000
1000
100
10
1
n_o
1
10
100
1000
10000
100000
1x10^6
t [MCS]


4.133(61)
synchronous (even)
3.476(61)
synchronous (odd)
1.637(31)
sequential
3.248(72)
random
⟨τ⟩
N
0
10000
20000
30000
40000
50000
60000
70000
80000
90000
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000


synchronous (odd)
synchronous (even)
sequential
random
1
0.1
0.01
0.001
P(τ)
0
50000
100000
150000
200000
250000
300000
τ

Model Sznajdów I

- w modelach socjologicznych opartych na modelu wyborcy czy modeku Isinga mamy do czynienia z oportunistami dostosowującymi się do otoczenia.
- w modelu Sznajdów [9] odwrotnie:
  - jedna osoba stojąca na ulicy i wpatrzona w niebo nie wywołujeodruchowego zerknięcia w górę...
  - ... cztery takie obok siebie — tak...
  - ... co właściwie kończy opis modelu
- każda komórka sieci $S_i = \pm 1$ (Republikanie/Demokraci, prawica/lewica, tak/nie)
- jeśli w losowo wybranym miejscu na sieci znajdują się dwa spiny równoległe — ich sąsiedzi w następnym kroku dołączą do tej „domeny"

Model Sznajdów II

- to losowe wybieranie miejsca *jest* kluczowe dla sprawy
- na sieci 1D — zgodna para przekonuje kolejną dwójkę, dla sieci regularnej prostej 2D — sześciu, dla heksagonalnej 2D — ośmiu, dla kubicznej prostej — dziesięciu
- jeśli wylosowana para $S_i S_{i+1} = -1$:
  - 1D — przeorientowuje sąsiadów ($S_i \to -S_i$)
  - 2D — pozostawia bez zmian ($S_i \to S_i$)
- system spinów kończy w stałym punkcie

$$\sum_{i=1}^{N} S_i = \pm N$$

Model Sznajdów III

- czas potrzebny na osiągnięcie konsensusu jest jednak relatywnie długi (sieć 1000×1000 jest właściwie poza naszym zasięgiem (listopad 2002))
- początkowa koncentracja p spinów w górę decyduje czy na końcu dostaniemy same spiny w górę czy w dół (przejście fazowe w $p_C = 1/2$)
- rezultaty nie zmieniają się ani na sieciach rozcieńczonych $S_i = 0, \pm 1$, ani gdy przekonywanie następuje tylko z pewnym prawdopodobieństwem $p < 1$ (w tym ostatnim przypadku potrzeba na to jednak dłuższego czasu!)
- również dla sieci heksagonalnej ze sprzężeniem *antyferromagnetycznym* ($J < 0$) osiąga się stan stacjonarny [10]

Model Sznajdów IV

- nawet gdy zamiast pary „misjonarzy" jest tylko jeden osiąga się konsensus [11]
- niech $S_i = 1, \ldots, q$ różnych opinii na sieci 2D:
  - przekonywanie możliwe tylko osób o zbliżonych poglądach.
  - konsensus jest osiągany dla $q \leq 3$ ale już nie dla $q = 4$.
  - na sieci heksagonalnej ta granica przesuwa się do $q = 5$.
- rolę pola magnetycznego z modelu Isinga pełni reklama w mass-mediach: po wymianie informacji między sąsiadami niech spin zostaje ustawiony na reklamowany (np. $+1$) — dla dużych sieci nawet mała dawka reklamy jest w stanie wymusić skończenie sieci w stanie „same +1" mimo, że początkowo obie opinie były równoprawdopodobne [12]

Model Latané I

- Teoria wpływu połecznego
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Social_impact_theory`
- Wpływ grupy na jednostkę zależy od *społecznej bliskości* danego osobnika do pozostałych osobników w społeczności [13–15].
- Wersja obliczeniowa [16], przegląd w [17].
- Sam Latané lubił fizyczną analogię swojej teorii nazywjąc ją „żarówkową teorią relacji społecznych". Zgodnie z tą analogią wpływ społeczny pełni rolę natężenia oświetlenia.

Model Latané II

Natężenie to zależy

- od mocy żarówki;
- ich liczby;
- i odległości od nich.

- Grupa społeczna składa się z N osobników, z których każdy może mieć jeden z (co najmniej) dwóch radykalnych poglądów (tak/nie) w pewnej sprawie opisywanych jako $\xi_i = \pm 1$.
- W przypadku więcej niż dwóch ($K > 2$) dostępnych opinii lepiej myśleć o ich (żarówek) kolorach niż przypisywać im wartości liczbowe $\xi_i \in \{\Xi_1, \Xi_2, \cdots, \Xi_K\}$.

Model Latané III

- Każdy osobnik jest charakteryzowany przez dwa parametry p_i i s_i określające intensywność oddziaływań z osobnikami o przeciwnych bądź tych sam poglądach.
- Zazwyczaj są one wartościami losowymi z rozkładami o średnich $\bar{s}$ i $\bar{p}$.
- Osobniki są umieszczone w *przestrzeni społecznej* ze zdefiniowaną odległością każdej pary osobników d_{ij}: intensywność oddziaływań jest malejącą funkcją wzajemnej odległości.

Model Latané IV

- Dynamika zmian opinii może być zadana jest deterministyczna reguła:

$$\xi_i(t+1) = \Xi_k \iff I_{i,k}(t) = \max(I_{i,1}(t), I_{i,2}(t), \cdots, I_{i,K}(t)), \tag{1}$$

  gdzie k jest tą opinią, której wyznawcy wywarli największy wpływ społeczny na i-tego aktora i $I_{i,k}$ jest miarą tego wpływu na aktora i pochodzącym od opinii Ξ_k.
- Reguła (1) jest aplikowaną synchronicznie wszystkim osobnikom.

Model Latané V

- Miara wpływu $I_{i,k}$ na i-tego aktora pochodząca od aktora j mającego *taką samą opinię* ($\xi_j = \xi_i$) jest obliczana jako:

$$I_{i,k}(t) = 4\mathcal{J}_s \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{q(s_j)}{g(d_{i,j})} \delta(\Xi_k, \xi_j(t)) \delta(\xi_j(t), \xi_i(t)) \right) \quad (2a)$$

a od aktorów z $K-1$ *odmiennymi od niego* opiniami ($\xi_j \neq \xi_i$) jako

$$I_{i,k}(t) = 4\mathcal{J}_p \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{q(p_j)}{g(d_{i,j})} \delta(\Xi_k, \xi_j(t)) [1 - \delta(\xi_j(t), \xi_i(t))] \right), \quad (2b)$$

gdzie $1 \leq k \leq K$ numeruje opinie a delta Kroneckera $\delta(x, y) = 1$, gdy $x = y$ i zero w przeciwnym wypadku [18].

Model Latané VI

- Załóżmy najprostszą zależność (jakby jej w ogóle nie było) od funkcji skalujących: $\mathcal{J}_S(x) \equiv x$, $\mathcal{J}_P(x) \equiv x$, $q(x) \equiv x$.
- Ponieważ wpływ społeczny (2) powinien maleć z odległością $d_{i,j}$ to funkcja $g(x)$ sklająca odległość od źródła opini (od żarówki) powinna być funkcją rosnącą (bo już jest w mianowniku), np:

$$g(x) = 1 + x^{\alpha}, \tag{3}$$

  żeby $g(0) = 1 \neq 0$ w mianowniku (2a).
- W układzie może się pojawić również szum informacyjny (w formie niezerowej temperatury społecznej $T > 0$) [8, 19, 20].

Model Latané VII

- Wówczas zamiast dereministycznego przepisu (1) dostajemy np. tylko czynniki boltzmannowskie

$$p_{i,k}(t) = \exp\left(\frac{I_{i,k}(t)}{T}\right), \tag{4a}$$

które przekładają się na prawdopodibieństwa

$$P_{i,k}(t) = \frac{p_{i,k}(t)}{\sum_{j=1}^{K} p_{i,j}(t)} \tag{4b}$$

wyboru przez i-tego aktora w następnej chwili czasowej k-tej opinii:

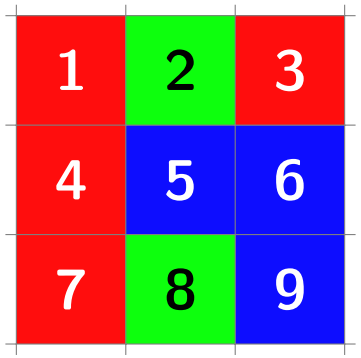
$$\xi_i(t+1) = \Xi_k, \text{z prawdopodobieństwem } P_{i,k}(t). \tag{4c}$$

Model Latané VIII

- Najpowszechniej zauważanym zjawiskiem jest *klasteryzacja* i *polaryzacja* opinii.
- Applet z pracy dyplomowej P. Bańcerowskiego: `http://www.zis.agh.edu.pl/app/MSc/Przemyslaw_Bancerowski/`

Przykład małego układu

Prześledźmy ewolucję układu dla jego małego rozmiaru ($L = 3$) [21]. Załóżmy trzy opinie w układzie $K = 3$ oznaczone jako „czerwona" (Ξ_1), „niebieska" (Ξ_2) i „zielona" (Ξ_3). Wyznaczmy wpływ społeczny na aktorów oznaczonych na rysunku 1 jako „2", „5" i „9". Zakładamy $s_i = i/10$ i $p_i = 1 - i/10$.



Rysunek: Przykład małej siatki z dziewięcioma aktorami i trzema opiniami. Numerki pokazują etykiety aktorów i. Kolory odpowiadają różnym opiniom („czerwony"—Ξ_1, „niebieski"—Ξ_2 i „zielony"—Ξ_3)

Przykład małego układu: aktor #2 I

Zgodnie z równaniem (2) by wyznaczyć opinię $\xi_2(t+1)$ w następnej chwili czasowej musimy policzyć $K = 3$ wpływów wywieranych na aktora $i = 2$ przez wyznawców trzech opinii dostępnych w systemie. Ponieważ $\xi_2(t) = \Xi_3$ („zielony") użyjemy równania (2a) do obliczenia

$$I_{2,\text{zielony}}(t) = 4\mathcal{J}_s \left(\frac{q(s_2)}{g(d_{2,2})} + \frac{q(s_8)}{g(d_{2,8})} \right), \tag{5}$$

od wszystkich innych aktorów z „zielonymi" opiniami (tj. od $i = 8$ i $i = 2$ włącznie). Wpływy od aktorów z „czerwonymi" i „niebieskimi" opiniami wyliczamy z równania (2b):

$$I_{2,\text{czerwony}}(t) = 4\mathcal{J}_p \left(\frac{q(p_1)}{g(d_{2,1})} + \frac{q(p_3)}{g(d_{2,3})} + \frac{q(p_4)}{g(d_{2,4})} + \frac{q(p_7)}{g(d_{2,7})} \right), \tag{6}$$

Przykład małego układu: aktor #2 II

$$I_{2,\text{niebieski}}(t) = 4\mathcal{J}_p \left(\frac{q(p_5)}{g(d_{2,5})} + \frac{q(p_6)}{g(d_{2,6})} + \frac{q(p_9)}{g(d_{2,9})} \right). \quad (7)$$

Zakładamy $\mathcal{J}_S(x) \equiv x$, $\mathcal{J}_P(x) \equiv x$, $q(x) \equiv x$ oraz funkcję sklalującą odległość $g(x) = 1 + x^\alpha$, z $\alpha = 2$. To prowadzi do:

$$I_{2,\text{zielony}}(t) = 4 \left(\frac{s_2}{1 + d_{2,2}^2} + \frac{s_8}{1 + d_{2,8}^2} \right) = 4 \left(\frac{0.2}{1 + 0^2} + \frac{0.8}{1 + 2^2} \right) = 1.44, \quad (8)$$

$$I_{2,\text{czerwony}}(t) = 4 \left(\frac{p_1}{1 + d_{2,1}^2} + \frac{p_3}{1 + d_{2,3}^2} + \frac{p_4}{1 + d_{2,4}^2} + \frac{p_7}{1 + d_{2,7}^2} \right)$$
$$= 4 \left(\frac{0.9}{1 + 1^2} + \frac{0.7}{1 + 1^2} + \frac{0.6}{1 + \sqrt{2}^2} + \frac{0.3}{1 + \sqrt{5}^2} \right) = 4.2, \quad (9)$$

Przykład małego układu: aktor #2 III

$$I_{2,\text{niebieski}}(t) = 4\left(\frac{p_5}{1+d_{2,5}^2} + \frac{p_6}{1+d_{2,6}^2} + \frac{p_9}{1+d_{2,9}^2}\right)$$
$$= 4\left(\frac{0.5}{1+1^2} + \frac{0.4}{1+\sqrt{2}^2} + \frac{0.1}{1+\sqrt{5}^2}\right) = 1.61. \quad (10)$$

Dla $T = 0$ największy wpływ na aktora $i = 2$

wywierają aktorzy z „czerwoną" opinią—więc na podstawie równania (1)—aktor $i = 2$ w następnej chwili czasowej **zmieni** swoją „zieloną" opinię ($\xi_2(t) = \Xi_3$) na „czerwoną" ($\xi_2(t+1) = \Xi_1$).

Przykład małego układu, aktor #5 I

Analogicznie, zgodnie z równaniem (2) by wyznaczyć opinię $\xi_5(t+1)$ w następnej chwili czasowej musimy policzyć $K = 3$ wpływów wywieranych na aktora $i = 5$ przez wyznawców trzech opinii dostępnych w systemie. Ponieważ $\xi_5(t) = \Xi_2$ („niebieski") użyjemy równania (2a) do obliczenia

$$I_{5,\text{niebieski}}(t) = 4\mathcal{J}_s \left(\frac{q(s_5)}{g(d_{5,5})} + \frac{q(s_6)}{g(d_{5,6})} + \frac{q(s_9)}{g(d_{5,9})} \right), \tag{11}$$

od wszystkich innych aktorów z „niebieskimi" opiniami (tj. od $i = 6$, 9), z $i = 5$ włącznie. Wpływy od aktorów z „czerwonymi" i „zielonymi" opiniami wyliczamy z równania (2b):

$$I_{5,\text{czerwony}}(t) = 4\mathcal{J}_p \left(\frac{q(p_1)}{g(d_{5,1})} + \frac{q(p_3)}{g(d_{5,3})} + \frac{q(p_4)}{g(d_{5,4})} + \frac{q(p_7)}{g(d_{5,7})} \right), \tag{12}$$

Przykład małego układu, aktor #5 II

$$I_{5,\text{zielony}}(t) = 4\mathcal{J}_p \left(\frac{q(p_2)}{g(d_{5,2})} + \frac{q(p_8)}{g(d_{5,8})} \right). \tag{13}$$

$$\begin{aligned} I_{5,\text{niebieski}}(t) &= 4 \left(\frac{s_5}{1+d_{5,5}^2} + \frac{s_6}{1+d_{5,6}^2} + \frac{s_9}{1+d_{5,9}^2} \right) \\ &= 4 \left(\frac{0.5}{1+0^2} + \frac{0.6}{1+1^2} + \frac{0.9}{1+\sqrt{2}^2} \right) = 4.4, \end{aligned} \tag{14}$$

Przykład małego układu, aktor #5 III

$$I_{5,\text{czerwony}}(t) = 4\left(\frac{p_1}{1+d_{5,1}^2} + \frac{p_3}{1+d_{5,3}^2} + \frac{p_4}{1+d_{5,4}^2} + \frac{p_7}{1+d_{5,7}^2}\right)$$
$$= 4\left(\frac{0.9}{1+\sqrt{2}^2} + \frac{0.7}{1+\sqrt{2}^2} + \frac{0.6}{1+1^2} + \frac{0.3}{1+\sqrt{2}^2}\right) = 3.7(3), \tag{15}$$

$$I_{5,\text{zielony}}(t) = 4\left(\frac{p_2}{1+d_{5,2}^2} + \frac{p_8}{1+d_{5,8}^2}\right)$$
$$= 4\left(\frac{0.8}{1+1^2} + \frac{0.2}{1+1^2}\right) = 2. \tag{16}$$

Przykład małego układu, aktor #5 IV

Dla $T = 0$ największy wpływ na aktora $i = 5$

wywierają aktorzy z „niebieską" opinią—więc na podstawie równania (1)—aktor $i = 5$ w następnej chwili czasowej **podtrzyma** swoją „niebieską" opinię ($\xi_5(t) = \Xi_2$).

Dla $T > 0$ obliczamy prawdopodobieństwa $P_{5,\text{niebieski}}$, $P_{5,\text{czerwony}}$ i $P_{5,\text{zielony}}$ wyboru opinii przez aktora $i = 5$ (patrz równania (4a)–(4b)). Na przykład, dla $T = 1$ te prawdopodobieństwa wynoszą

$$\begin{aligned} P_{5,\text{niebieski}} &= \frac{\exp(I_{5,\text{niebieski}}/1)}{P_1}, \\ P_{5,\text{czerwony}} &= \frac{\exp(I_{5,\text{czerwony}}/1)}{P_1}, \\ P_{5,\text{zielony}} &= \frac{\exp(I_{5,\text{zielony}}/1)}{P_1}, \end{aligned} \tag{17}$$

Przykład małego układu, aktor #5 V

a dla $T = 10$ mamy

$$
\begin{aligned}
P_{5,\text{niebieski}} &= \frac{\exp(I_{5,\text{niebieski}}/10)}{P_{10}}, \\
P_{5,\text{czerwony}} &= \frac{\exp(I_{5,\text{czerwony}}/10)}{P_{10}}, \\
P_{5,\text{zielony}} &= \frac{\exp(I_{5,\text{zielony}}/10)}{P_{10}},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

gdzie stała normalizacyjna (żeby się prawdopodobieństwa sumowały do jedynki)

$$P_1 = \exp(I_{5,\text{niebieski}}/1) + \exp(I_{5,\text{czerwony}}/1) + \exp(I_{5,\text{zielony}}/1)$$

Przykład małego układu, aktor #5 VI

oraz

$$P_{10} = \exp(I_{5,\text{niebieski}}/10) + \exp(I_{5,\text{czerwony}}/10) + \exp(I_{5,\text{zielony}}/10).$$

Wyliczone prawdopodobieństwa dla $T = 1$ wynoszą

$$\begin{aligned} P_{5,\text{niebieski}} &= \frac{\exp(4.4/1)}{e^{4.4} + e^{3.7(3)} + e^{2}} \approx 0.624, \\ P_{5,\text{red}} &= \frac{\exp(3.7(3)/1)}{e^{4.4} + e^{3.7(3)} + e^{2}} \approx 0.319, \\ P_{5,\text{green}} &= \frac{\exp(2/1)}{e^{4.4} + e^{3.7(3)} + e^{2}} \approx 0.056, \end{aligned} \tag{19}$$

Przykład małego układu, aktor #5 VII

a dla $T = 10$ mamy

$$
\begin{aligned}
P_{5,\text{niebieski}} &= \frac{\exp(4.4/10)}{e^{0.44} + e^{0.37(3)} + e^{0.2}} \approx 0.367, \\
P_{5,\text{red}} &= \frac{\exp(7.(3)/10)}{e^{0.44} + e^{0.37(3)} + e^{0.2}} \approx 0.343, \\
P_{5,\text{green}} &= \frac{\exp(2/10)}{e^{0.44} + e^{0.37(3)} + e^{0.2}} \approx 0.289.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Dla niedeterministycznej wersji algorytmu (tj. dla $T > 0$)

nadal mamy najbardziej prawdopodobne wybranie opinii „niebieskiej" Ξ_1 dla $\xi_5(t+1)$. Ale prawdopodobieństwo to dla aktora $i = 5$ spada z 100% dla $T = 0$ do 62.4% dla $T = 1$ i do 36.7% dla $T = 10$ aż do 33.3%$= 1/K$ dla $T \to \infty$.

Przykład małego układu, aktor #9 I

Powtórzmy obliczenia dla aktora $i = 9$:

$$I_{9,\text{niebieski}}(t) = 4\mathcal{J}_s \left(\frac{q(s_5)}{g(d_{9,5})} + \frac{q(s_6)}{g(d_{9,6})} + \frac{q(s_9)}{g(d_{9,9})} \right), \tag{21}$$

$$I_{9,\text{czerwony}}(t) = 4\mathcal{J}_p \left(\frac{q(p_1)}{g(d_{9,1})} + \frac{q(p_3)}{g(d_{9,3})} + \frac{q(p_4)}{g(d_{9,4})} + \frac{q(p_7)}{g(d_{9,7})} \right), \tag{22}$$

$$I_{9,\text{zielony}}(t) = 4\mathcal{J}_p \left(\frac{q(p_2)}{g(d_{9,2})} + \frac{q(p_8)}{g(d_{9,8})} \right), \tag{23}$$

Przykład małego układu, aktor #9 II

$$I_{9,\text{niebieski}}(t) = 4\left(\frac{s_5}{1+d_{9,5}^2} + \frac{s_6}{1+d_{9,6}^2} + \frac{s_9}{1+d_{9,9}^2}\right)$$
$$= 4\left(\frac{0.5}{1+\sqrt{2}^2} + \frac{0.6}{1+1^2} + \frac{0.9}{1+0^2}\right) = 5.4(6), \quad (24)$$

$$I_{9,\text{czerwony}}(t) = 4\left(\frac{p_1}{1+d_{9,1}^2} + \frac{p_3}{1+d_{9,3}^2} + \frac{p_4}{1+d_{9,4}^2} + \frac{p_7}{1+d_{9,7}^2}\right)$$
$$= 4\left(\frac{0.9}{1+(2\sqrt{2})^2} + \frac{0.7}{1+2^2} + \frac{0.6}{1+\sqrt{5}^2} + \frac{0.3}{1+2^2}\right) = 1.6, \quad (25)$$

Przykład małego układu, aktor #9 III

$$I_{9,\text{zielony}}(t) = 4\left(\frac{p_2}{1+d_{9,2}^2} + \frac{p_8}{1+d_{9,8}^2}\right)$$
$$= 4\left(\frac{0.8}{1+\sqrt{5}^2} + \frac{0.2}{1+1^2}\right) = 0.9(3). \quad (26)$$

Dla $T = 0$ największy wpływ na aktora $i = 9$

jest znów wywierany przez „niebieskich" aktorów i dlatego—zgodnie z równaniem (1)—aktor $i = 9$ w następnym kroku czasowym on też **podtrzyma** swoją „niebieską" opinię ($\xi_9(t+1) = \xi_9(t) = \Xi_2$).

Przykład małego układu, aktor #9 IV

Dla $T > 0$ obliczmy prawdopodobieństwa $P_{9,\text{niebieska}}$, $P_{9,\text{czerwona}}$ i $P_{9,\text{zielona}}$ dla aktora $i = 9$ (równania (4a)–(4b)). Na przykład, dla $T = 1$ te prawdopodobieństwa wynoszą

$$\begin{aligned} P_{9,\text{blue}} &= \frac{\exp(I_{9,\text{blue}}/1)}{P_1}, \\ P_{9,\text{red}} &= \frac{\exp(I_{9,\text{red}}/1)}{P_1}, \\ P_{9,\text{green}} &= \frac{\exp(I_{9,\text{green}}/1)}{P_1}, \end{aligned} \tag{27}$$

Przykład małego układu, aktor #9 V

a dla $T = 10$ mamy

$$
\begin{aligned}
P_{9,\text{blue}} &= \frac{\exp(I_{9,\text{blue}}/10)}{P_{10}}, \\
P_{9,\text{red}} &= \frac{\exp(I_{9,\text{red}}/10)}{P_{10}}, \\
P_{9,\text{green}} &= \frac{\exp(I_{9,\text{green}}/10)}{P_{10}},
\end{aligned}
\tag{28}
$$

stałe normalizacyjne wynoszą

$$P_1 = \exp(I_{9,\text{blue}}/1) + \exp(I_{9,\text{red}}/1) + \exp(I_{9,\text{green}}/1)$$

oraz

$$P_{10} = \exp(I_{9,\text{blue}}/10) + \exp(I_{9,\text{red}}/10) + \exp(I_{9,\text{green}}/10).$$

Przykład małego układu, aktor #9 VI

Wyznaczone prawdopobieństwa dla $T = 1$ wynoszą

$$
\begin{aligned}
P_{9,\text{blue}} &= \frac{\exp(5.4(6)/1)}{e^{5.4(6)} + e^{1.6} + e^{0.9(3)}} \approx 0.969, \\
P_{9,\text{red}} &= \frac{\exp(1.6/1)}{e^{5.4(6)} + e^{1.6} + e^{0.9(3)}} \approx 0.020, \\
P_{9,\text{green}} &= \frac{\exp(0.9(3)/1)}{e^{5.4(6)} + e^{1.6} + e^{0.9(3)}} \approx 0.011,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

a dla $T = 10$ mamy

$$
\begin{aligned}
P_{9,\text{blue}} &= \frac{\exp(5.4(6)/10)}{e^{0.54(6)} + e^{0.16} + e^{0.09(3)}} \approx 0.432, \\
P_{9,\text{red}} &= \frac{\exp(1.6/10)}{e^{0.54(6)} + e^{0.16} + e^{0.09(3)}} \approx 0.293, \\
P_{9,\text{green}} &= \frac{\exp(0.9(3)/10)}{e^{0.54(6)} + e^{0.16} + e^{0.09(3)}} \approx 0.275.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Przykład małego układu, aktor #9 VII

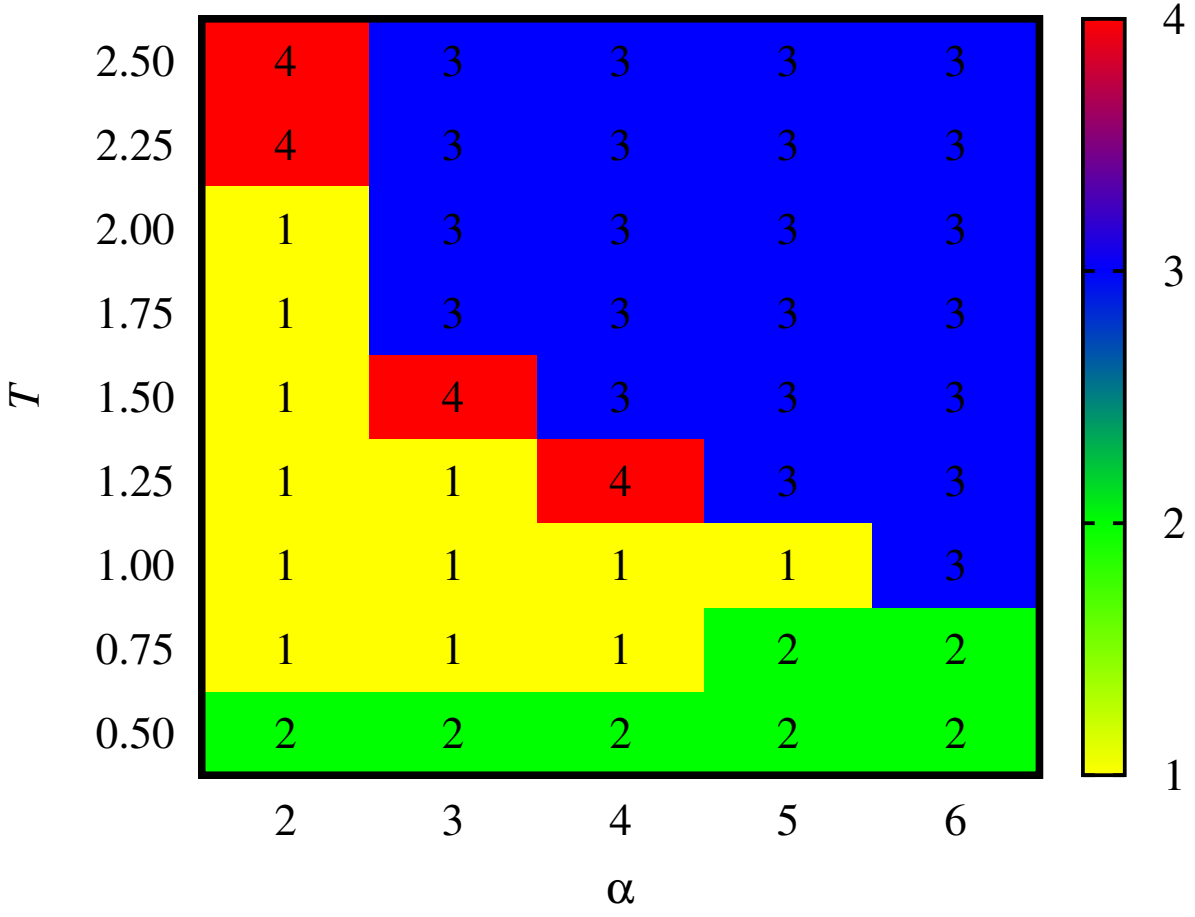
Podobnie jak dla aktora $i = 5$, wzrost poziomu szumu (temperatury społecznej) redukuje szanse na podtrzymanie swojej początkowej opinii u aktora $i = 9$. Dla $T = 10$ te prawdopodobieństwa nie różnią się od $1/K$ o więcj niż 0,1.

Diagram fazowy modelu

W zależność od przyjętych (α, T) ewoluacja układu prowadzi społeczeństwo do:

1. konsensusu;
2. konsensusu bądź polaryzacji społeczeństwa;
3. przyjmowanie losowych opinii;
4. mieszanki faz wskazanych powyżej (część symulacji kończy się przy tych parametrach sytuacjami z (1)–(3)).

Diagram fazowy modelu



Rysunek: Znaczenie „faz” na poprzednim slajdzie

Terry Pratchett, *Kolor magii*, Prószyński i S-ka, 1994

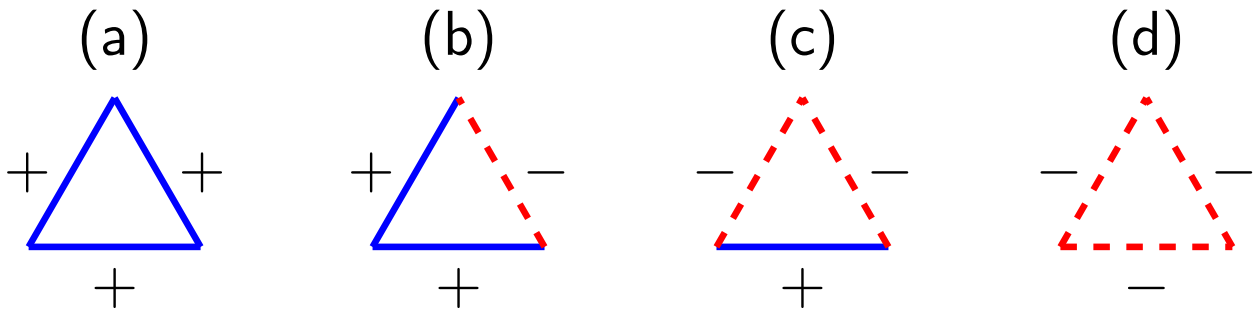
Nienawiść jest siłą przyciągającą, tak jak miłość.

Model Heidera I

- Równowaga strukturalna
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Balance_theory`
- prace Heidera [22, 23]
- przypisujemy relacje (wrogie bądź przyjazne) oddziaływaniom między węzłami sieci
- oznaczmy relację między węzłami i i j jako x_{ij}
- $x_{ij} < 0$ – wrogość, $x_{ij} > 0$ – sympatia
- spośród triad z rys. 3 dwa (te z 3a, 3c) nazywamy zbalansowanymi (w sensie Heidera) gdyż znaki relacji odpowiadają zasadom:
  - przyjaciel mojego przyjaciela jest moim przyjacielem,
  - przyjaciel mojego wroga jest moim wrogiem,
  - wróg mojego przyjaciela jest moim wrogiem,

Model Heidera II

- wróg mojego wroga jest moim przyjacielem.



Rysunek: Triady oddziaływań odpowiadające stanom zbalansowanym (pierwszy i trzeci) oraz stanom niezablansowanym (drugi i czwarty)

- W triadach niezbalansowanych (rys. 3b, 3d) powyższe zasady nie są spełnione, co prowadzi do pojawienia się napięcia znanego jako dysonans poznawczy `https://en.wikipedia.org/wiki/Cognitive_dissonance`.

Model Heidera III

- By rozładować to napięcie przydałoby się zmienić część relacji w układzie (tak by wyeliminować 3b i 3d).
- Zacznijmy od próby łatwej do zaimplementowania metody odróżniania triad zbalansowanych i niezabalansowanych.
- Przyjmijmy, $|x_{ij}| = 1$.
- Wówczas w trójkącie ijk: $x_{ij}x_{jk}x_{ik} = +1$ (dla triad zbalansowanych) i $x_{ij}x_{jk}x_{ik} = -1$ (dla triad niezbalansowanych)

Model Heidera IV

- Suma

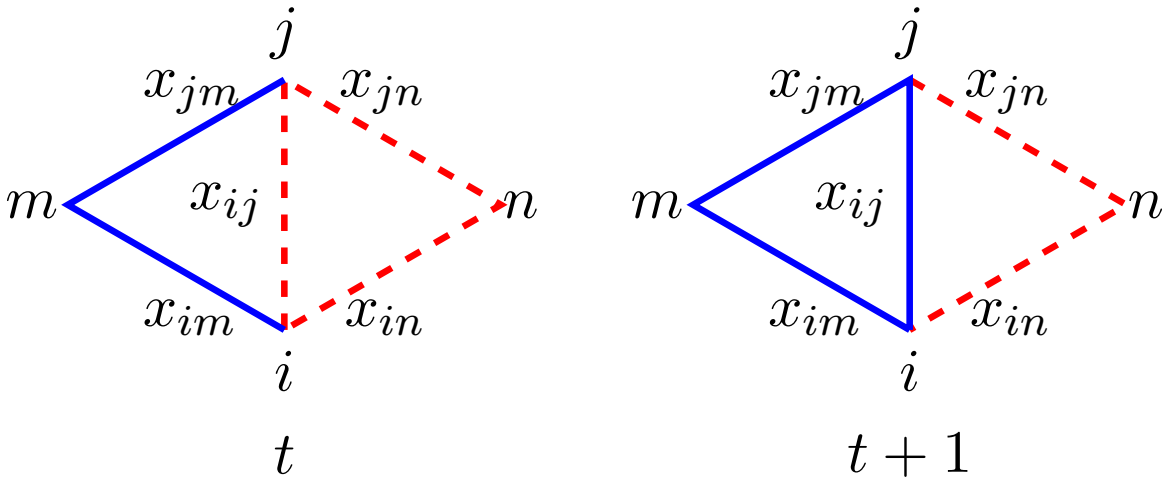
$$U \equiv -\frac{1}{\Delta} \sum_i \sum_{j>i} \sum_{k>j} x_{ij} x_{jk} x_{ik} \tag{31}$$

(po wszystkich trójkątach, znormalizowana do liczby trójkątów Δ) wynosi -1 jeśli *każdy* trójkąt jest zbalansowany (w sensie Heidera).

- Ewolucja układu może przyjąć formę deterministyczną [24] zmierzającą do eliminacji niezbalansowanych trójkątów

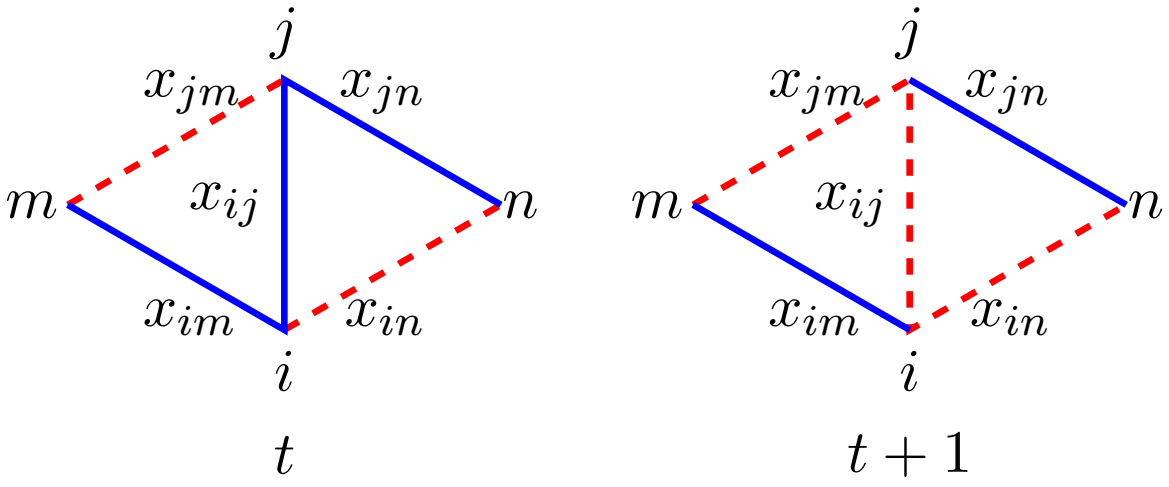
$$x_{ij}(t+1) = \mathrm{sgn}\left(x_{im}(t)x_{jm}(t) + x_{in}(t)x_{jn}(t)\right). \tag{32}$$

Model Heidera V



Rysunek: Przykłady prostych uładów relacji x_{im}, x_{in}, x_{jm}, x_{jn} wpływających na relację x_{ij} w następnej chwili czasowej $[x_{ij}(t) = -1 \rightarrow x_{ij}(t+1) = +1]$ zgodnie z równaniem (32) (przypadek deterministyczny, bez szumu informacyjnego)

Model Heidera VI



Rysunek: Przykłady prostych uładów relacji x_{im}, x_{in}, x_{jm}, x_{jn} wpływających na relację x_{ij} w następnej chwili czasowej $[x_{ij}(t) = +1 \rightarrow x_{ij}(t+1) = -1]$ zgodnie z równaniem (32) (przypadek deterministyczny, bez szumu informacyjnego)

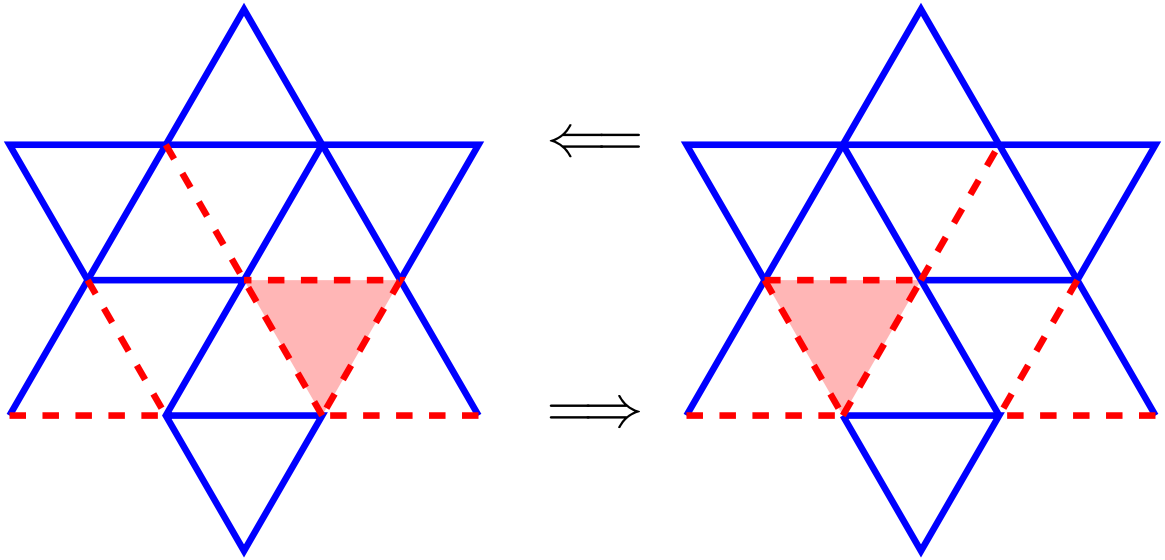
Model Heidera VII

- Jeśli krawędź ij należy do większej (niż pary) liczby triad to sumowanie jest po iloczynach par wartości relacji w każdym trójkącie do kótrego należy krawędź ij.
- W dążeniu do uzyskania równowagi Heidera układ może dotrzeć do stanu z samymi $x_{ij} = +1$. Układ ten nazywamy stanem raju i charakteryzuje go jednoczesne $U = -1$ oraz $\langle x_{ij} \rangle = +1$, gdzie $\langle \cdots \rangle$ oznacza średniowanie po wszystkich krawędziach/relacjach dostępnych w układzie.
- Może się zdażyć, że układ dotrze do stanu zbalansowanego $U = -1$ *nie* będącego rajem (tj. z $\langle x_{ij} \rangle \neq +1$).
- Wówczas układ dzieli się na grupy: wzajemnie wrogie, ale wewnętrznie zaprzyjaźnione.

Model Heidera VIII

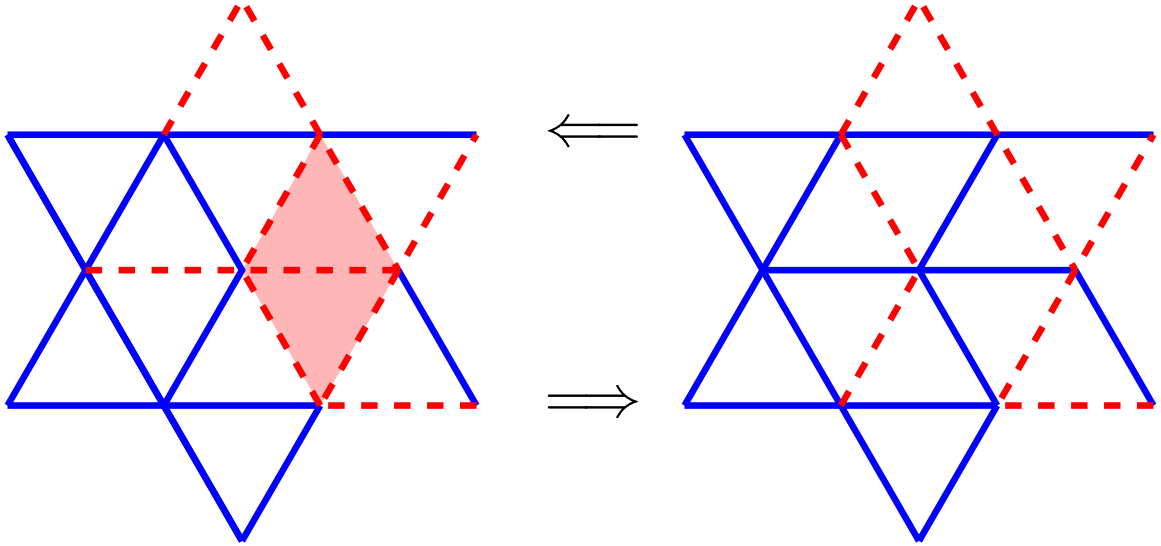
- Istnieje wersja niedetrministyczna równania (32) z szumem (termicznym) — niezerową temperaturą społeczną [25–30].
- Widać, że do ewolucji układu potrzebne są sieci dające szansę na powstanie dysonansu poznawczego: z trójkątami.
- Najprostszym rozwiązaniem zdaje się przyjęcie topologii regularnej sieci trójkątnej [24]. Ale jeszcze łatwiej symulacje prowadzi się na grafie zupełnym (N wierzchołków połączonych każdy z każdym, odpada probelm „brzegów" układu).

Model Heidera IX



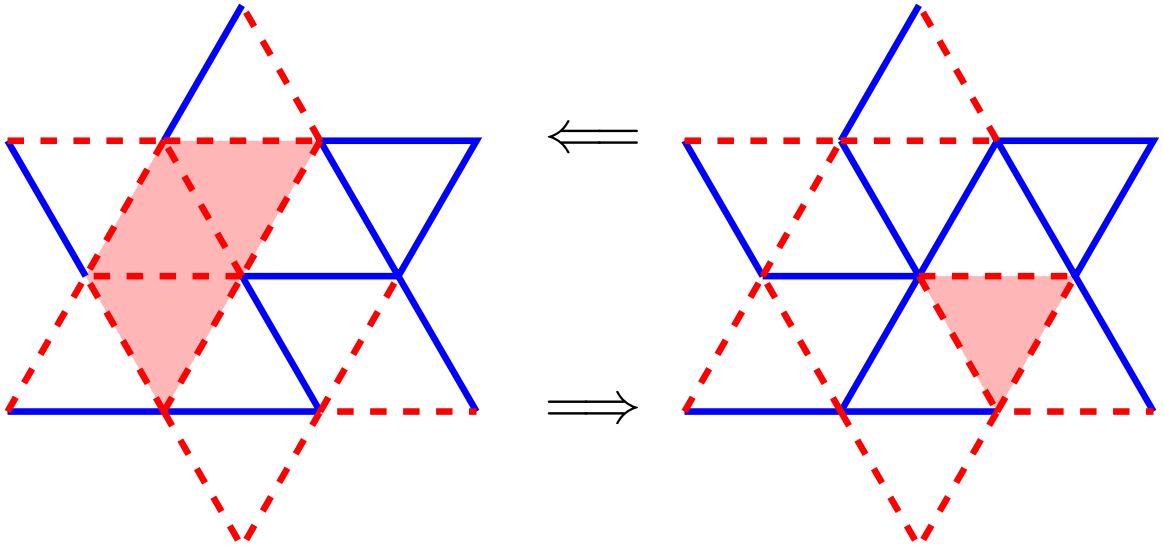
Rysunek: Przykładowe „migacze Heidera” o długości cyklu 2

Model Heidera X



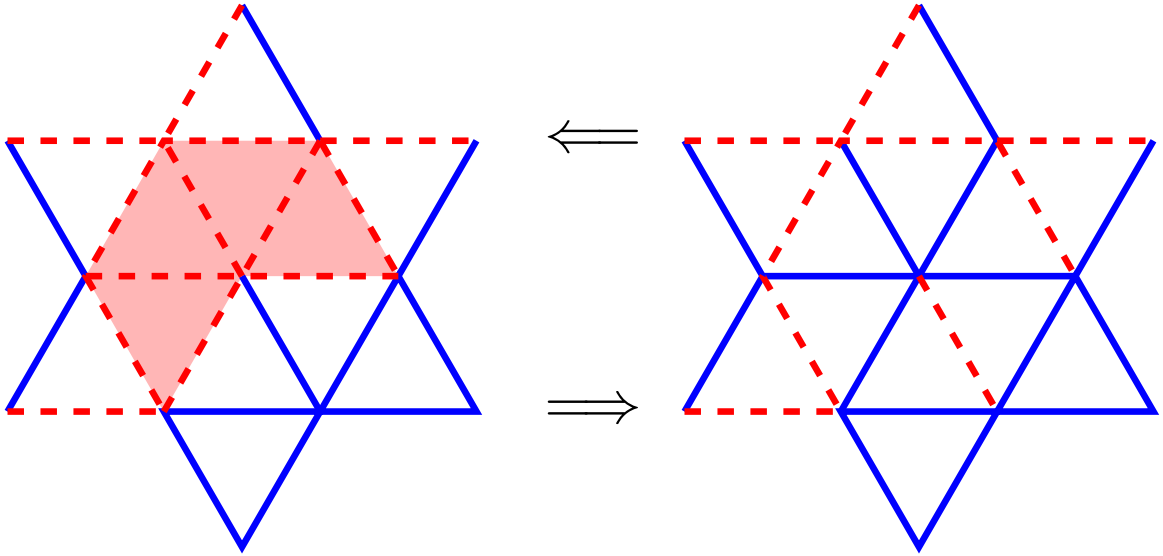
Rysunek: Przykładowe „migacze Heidera” o długości cyklu 2

Model Heidera XI



Rysunek: Przykładowe „migacze Heidera” o długości cyklu 2

Model Heidera XII



Rysunek: Przykładowe „migacze Heidera” o długości cyklu 2

Podejście średniopolowe [25] I

The dynamics towards the Heider balance can be written as

$$x_{ij}(t+1) = \mathrm{sgn}\left(\sum_{k}^{M_{ij}} x_{ik}(t)x_{kj}(t)\right), \tag{33}$$

where the summation goes through M_{ij} common nearest neighbors of the connected nodes i and j, that is, M_{ij} is the number of triangles that involve the link ij.
If one assumes that the link dynamics possesses a probabilistic character, then a natural form of updating rule (33) as in Heider dynamics can be:

$$x_{ij}(t+1) = \begin{cases} +1 & \text{with probability } p_{ij}(t), \\ -1 & \text{with probability } 1 - p_{ij}(t), \end{cases} \tag{34a}$$

Podejście średniopolowe [25] II

where

$$p_{ij}(t) = \frac{\exp(\xi_{ij}(t)/T)}{\exp(\xi_{ij}(t)/T) + \exp(-\xi_{ij}(t)/T)} \tag{34b}$$

and

$$\xi_{ij}(t) = \sum_{k}^{M_{ij}} x_{ik}(t) x_{kj}(t). \tag{34c}$$

Here, the positive variable T can be considered as a social temperature [31] (or a measure of the noise amplitude) and in the limit $T \to 0^+$ we have $p \to 1$ so (34) reduces to (33).
The expected value $\langle x_{ij}(t+1) \rangle$ in this approach is equal to

$$\langle x_{ij}(t+1) \rangle = \mathrm{tgh}\left(T^{-1} \sum_{k}^{M_{ij}} x_{ik}(t) x_{kj}(t) \right), \tag{35}$$

Podejście średniopolowe [25] III

where $\langle \cdots \rangle$ stands for a mean value related to the stochastic process defined by (34).
The mean $\langle x_{ij}(t+1) \rangle$ is a continuous variable that can be negative or positive, and for $T \to 0^+$ the (35) reduces to (33).
Then instead of (35) we have

$$\{\langle x_{ij}(t+1) \rangle\} \approx \mathrm{tgh}\left(\frac{1}{T} \sum_{k}^{M_{ij}} \{\langle x_{ik}(t) \rangle\}\{\langle x_{kj}(t) \rangle\} \right), \qquad (36)$$

where $\{\cdots\}$ denotes the average over all $N(N-1)/2$ available nodes' pairs.

Podejście średniopolowe [25] IV

Now let us assume—also in agreement with the spirit of mean-field approximation—that all averages are the same

$$\{\langle x_{ij}\rangle\} = \{\langle x_{ik}\rangle\} = \{\langle x_{kj}\rangle\} = x. \tag{37}$$

It follows that we get

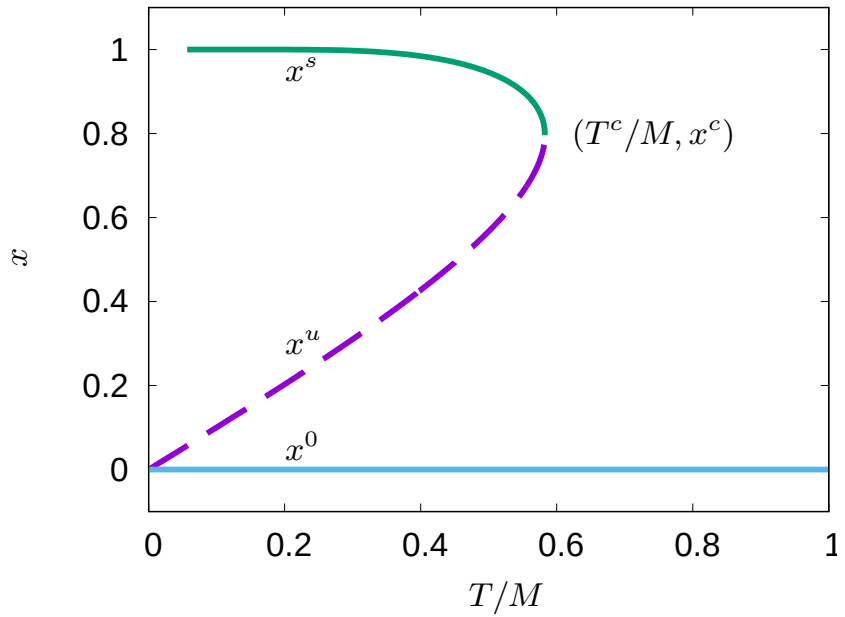
$$x(t+1) = \mathrm{tgh}[ax^2(t)], \tag{38}$$

where

$$a = M/T, \tag{39}$$

and $M = \{M_{ij}\}$ is the average number of common neighbors of agents i and j (it also the number of different triads containing the edge ij).

Podejście średniopolowe [25] V



Rysunek: Solutions for mean values of links polarizations in Heider balance resulting from the mean field approximation $x = \mathrm{tgh}(ax^2)$. At the point $T^c/M = 1/a^c \approx 0.582584\cdots$ $(x^c \approx 0.796388\cdots)$ a discontinuous transition between the upper branch and the solution $x = 0$ takes place.

Podejście średniopolowe [25] VI

The above values a^c, x^c can be received from a pair of transcendental algebraic relations that describe the fixed point and its tangency condition, namely

$$x^c = \mathrm{tgh}\left(a^c (x^c)^2\right) \tag{40a}$$

and

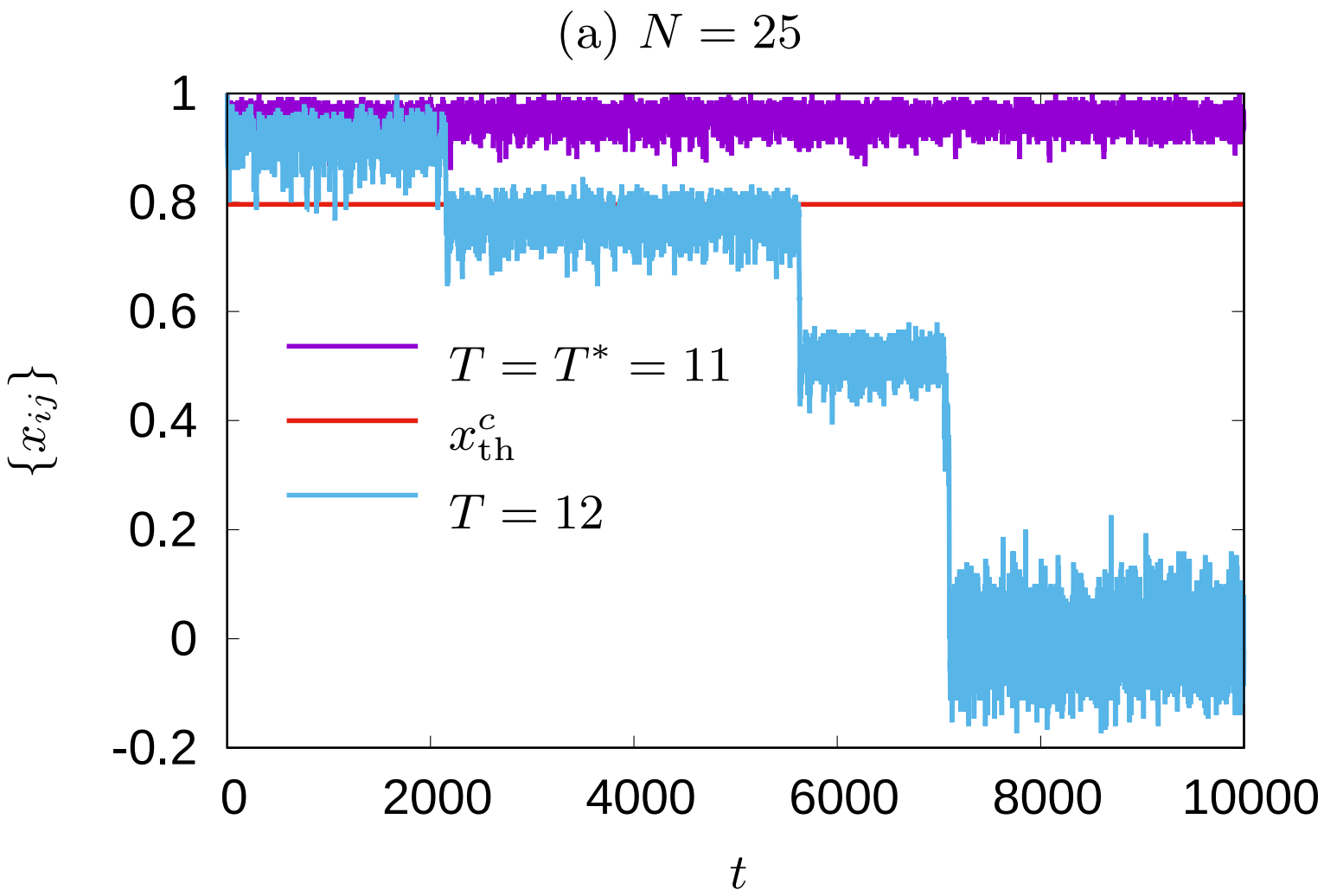
$$2a^c x^c = \cosh^2\left(a^c (x^c)^2\right). \tag{40b}$$

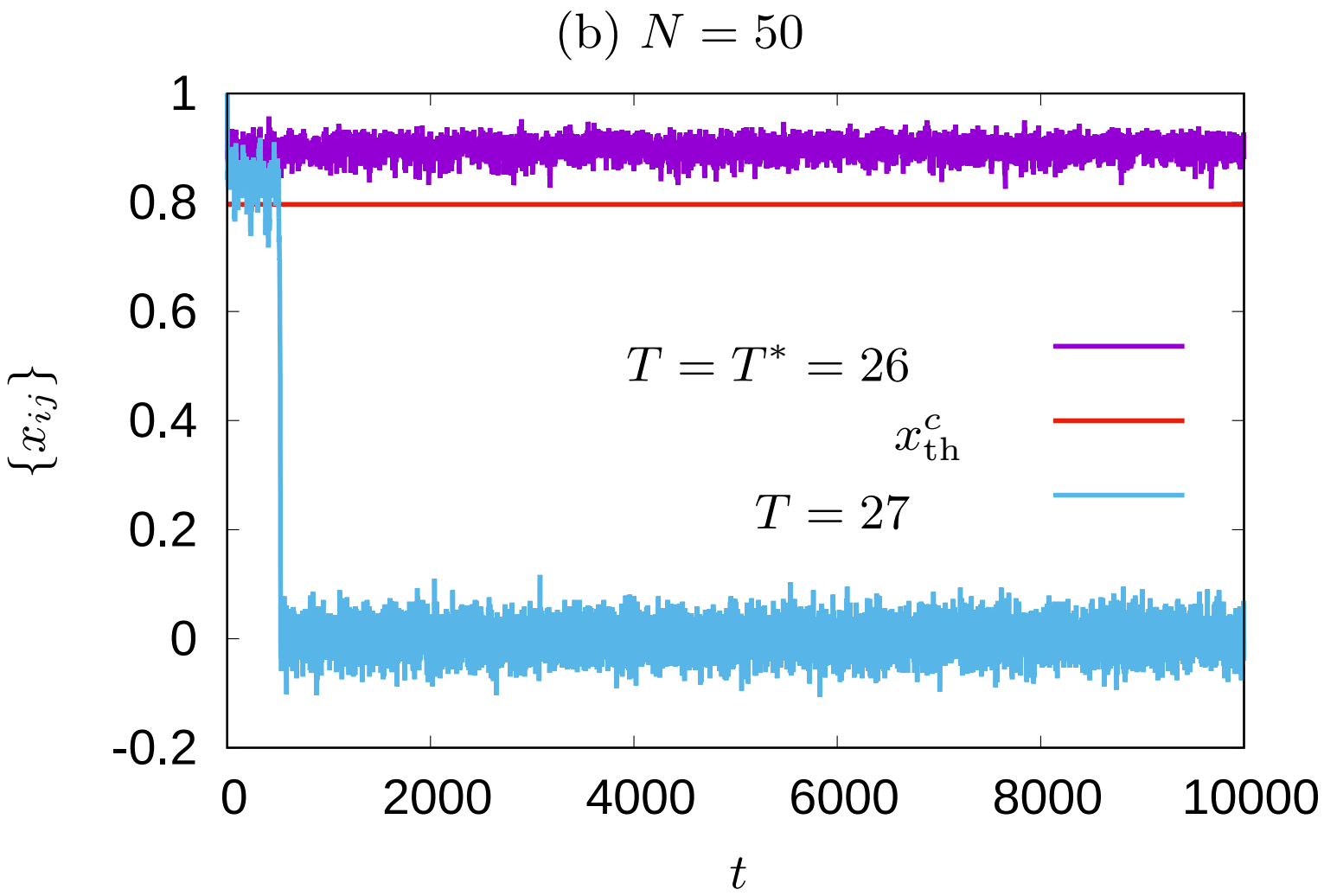
The solutions (see Fig. 10) are

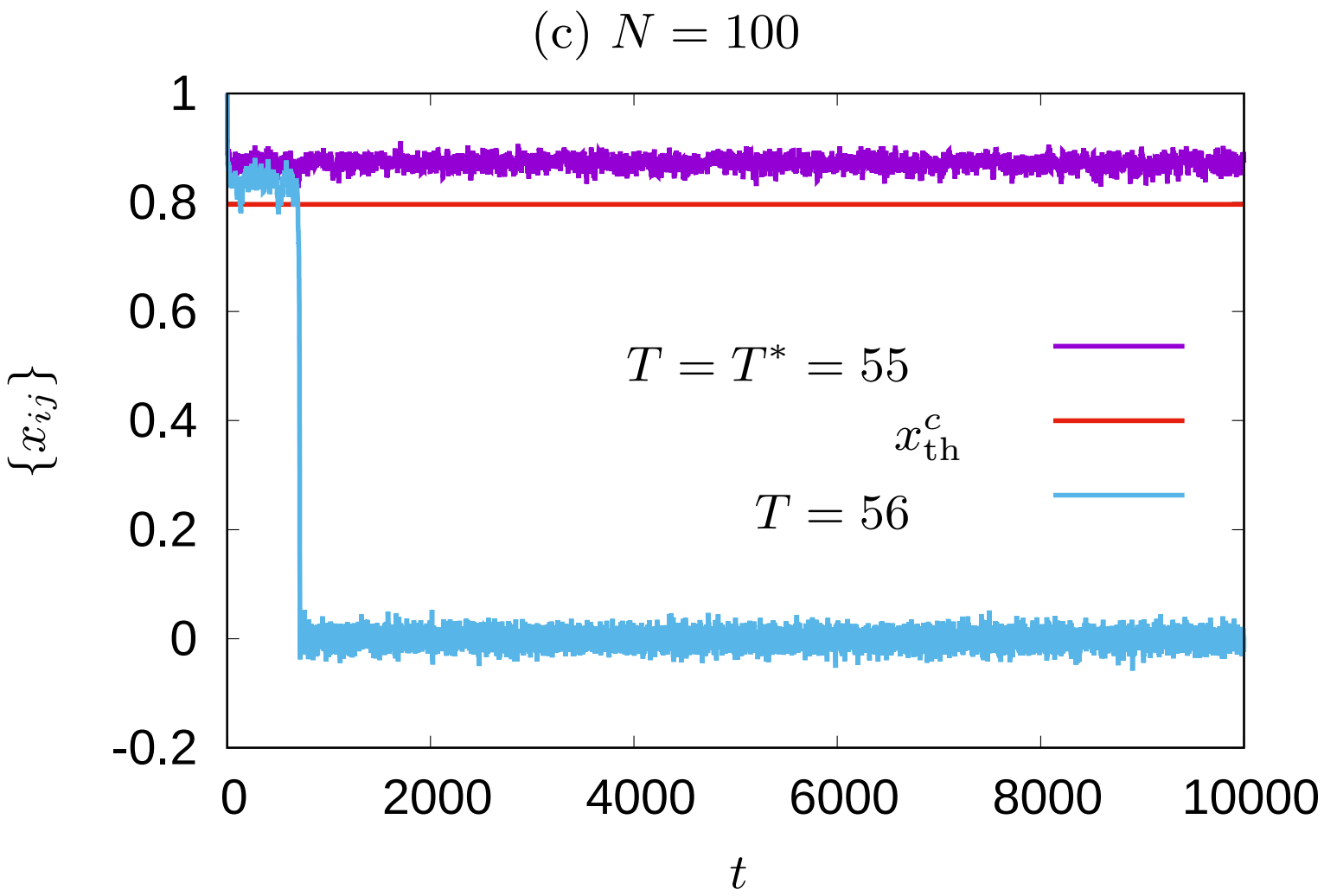
$$x^c_{\mathsf{th}} \approx 0.796388\cdots \tag{41a}$$

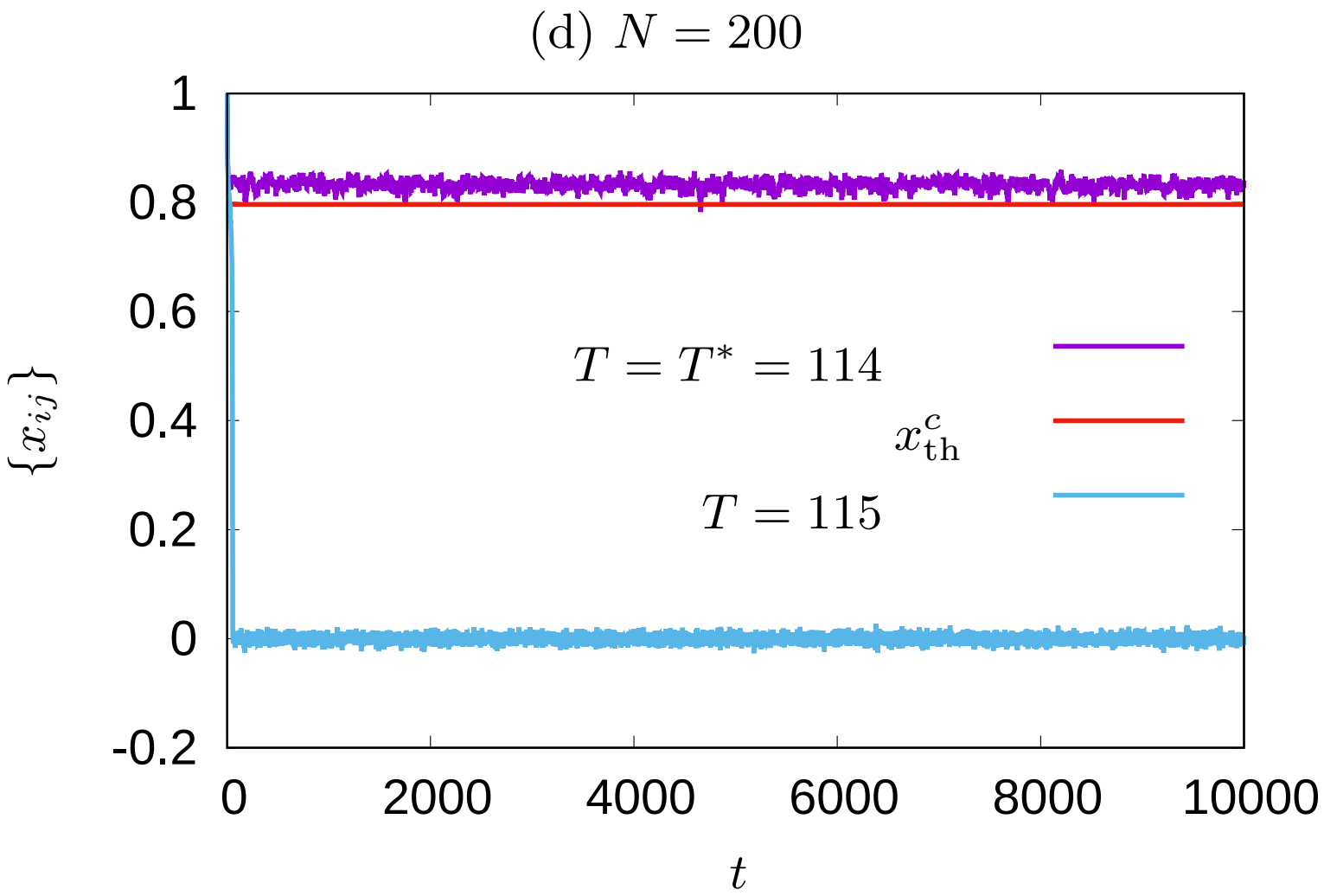
and

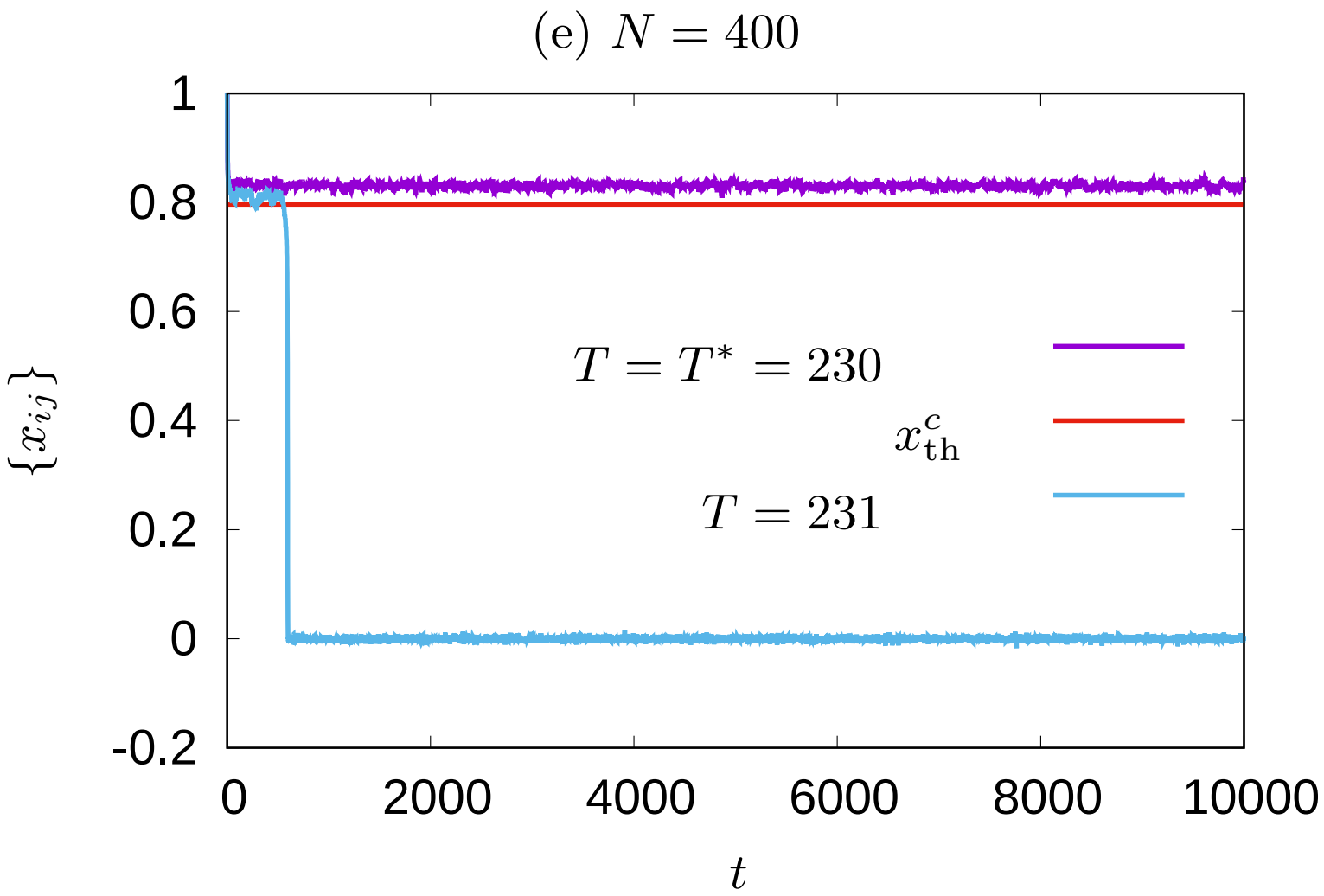
$$a^c_{\mathsf{th}} = \mathrm{tgh}^{-1}(x^c_{\mathsf{th}})/(x^c_{\mathsf{th}})^2 \approx 1.71649\cdots. \tag{41b}$$

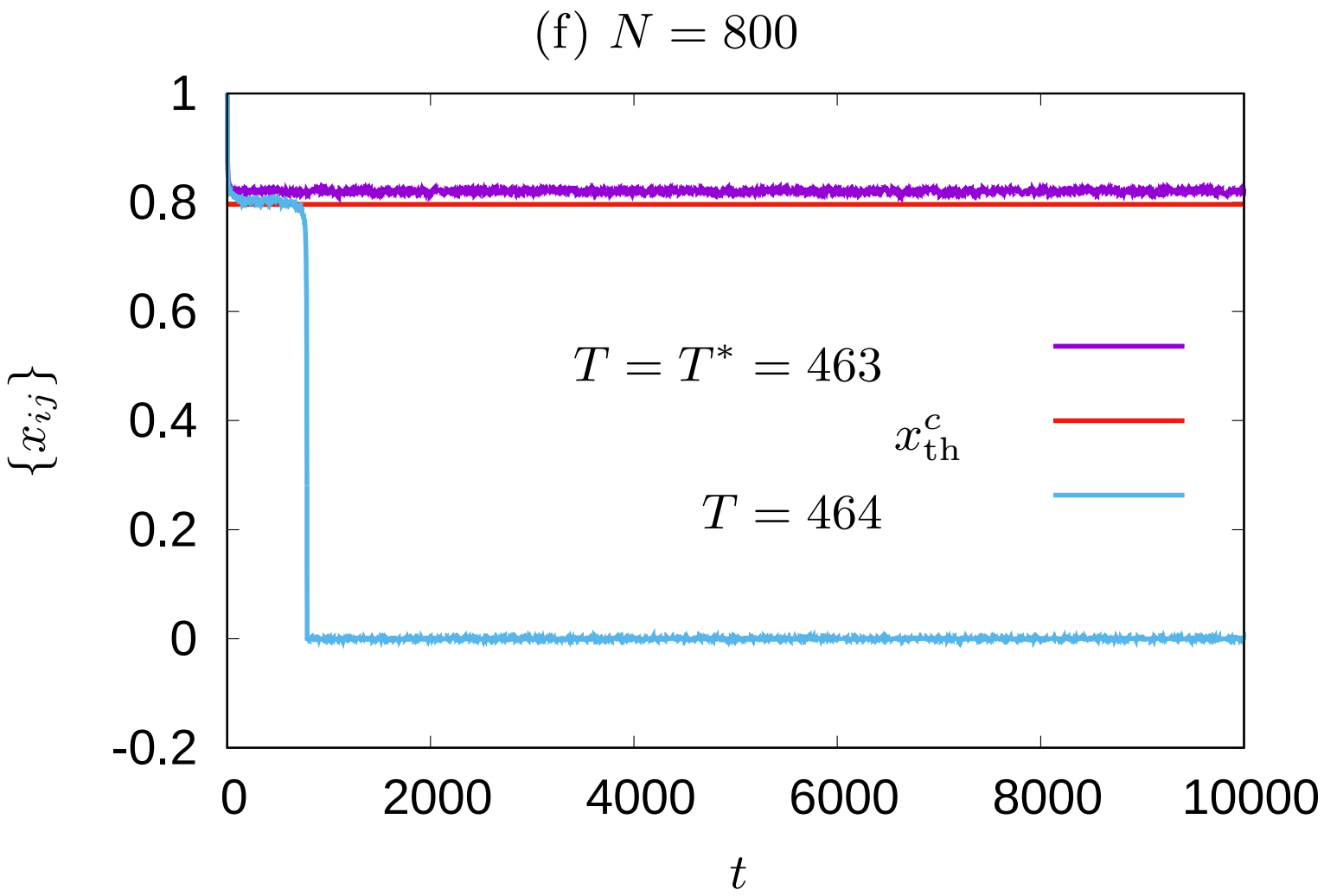

(a) $N = 25$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
$\{x_{ij}\}$
$T = T^* = 11$
x^c_{th}
$T = 12$
0
2000
4000
6000
8000
10000
t

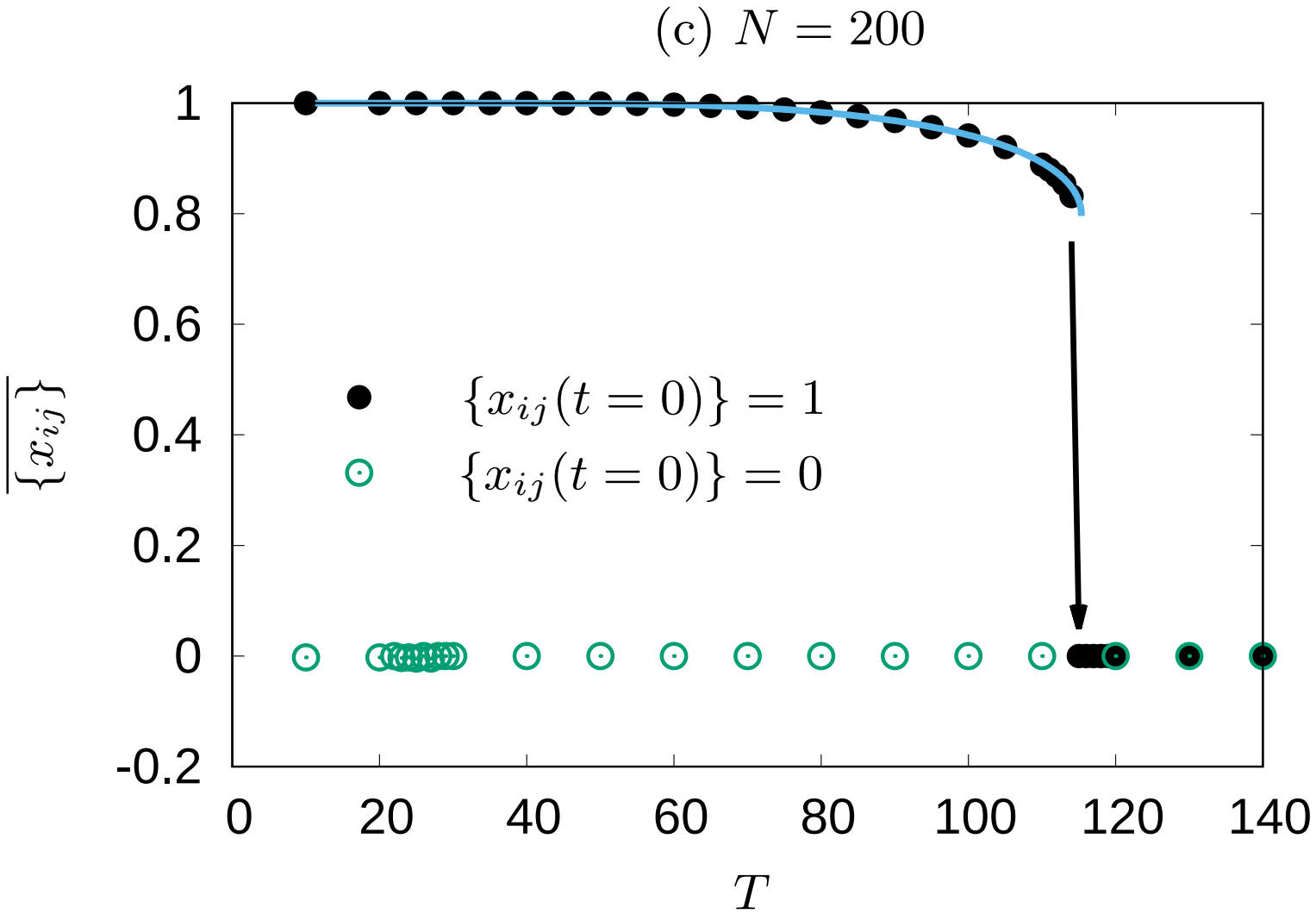

(b) $N = 50$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
$\{x_{ij}\}$
0
2000
4000
6000
8000
10000
t
$T = T^* = 26$
x^c_{th}
$T = 27$

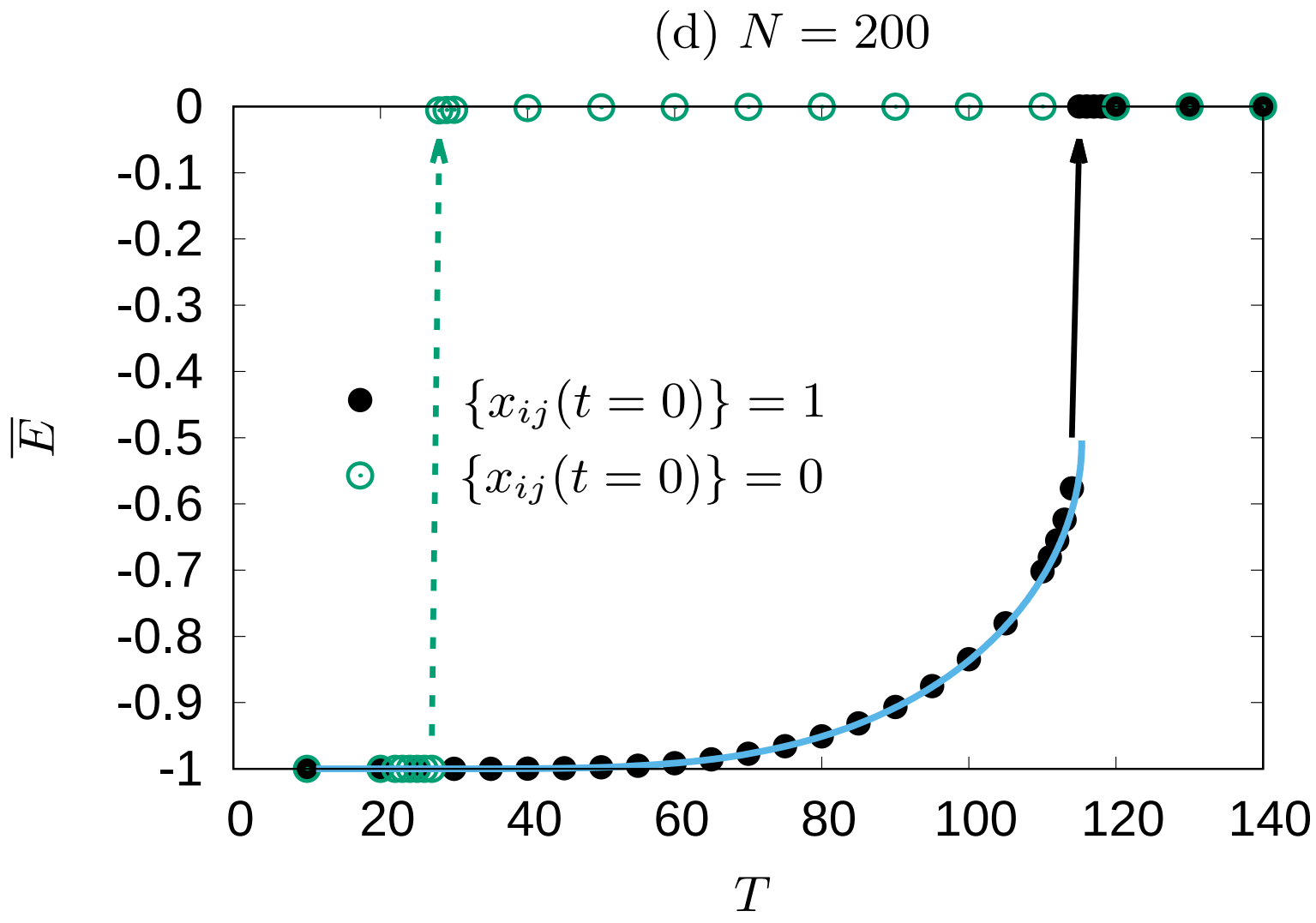

(c) $N = 100$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
$\{x_{ij}\}$
0
2000
4000
6000
8000
10000
t
$T = T^* = 55$
x^c_{th}
$T = 56$


(d) $N = 200$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
$\{x_{ij}\}$
$T = T^* = 114$
x^c_{th}
$T = 115$
0
2000
4000
6000
8000
10000
t


(e) $N = 400$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
$\{x_{ij}\}$
0
2000
4000
6000
8000
10000
t
$T = T^* = 230$
x^c_{th}
$T = 231$


(f) $N = 800$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
$\{x_{ij}\}$
0
2000
4000
6000
8000
10000
t
$T = T^* = 463$
x^c_{th}
$T = 464$


(c) $N = 200$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
20
40
60
80
100
120
140
T
$\overline{\{x_{ij}\}}$
$\{x_{ij}(t=0)\} = 1$
$\{x_{ij}(t=0)\} = 0$


(d) $N = 200$
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
-0.8
-0.9
-1
$\overline{E}$
$\{x_{ij}(t=0)\} = 1$
$\{x_{ij}(t=0)\} = 0$
0
20
40
60
80
100
120
140
T

[1] W. Weidlich. *Sociodynamics; A Systematic Approach to Mathematical Modelling in the Social Science*. Harwood Academic Publishers, 2000.

[2] R. A. Holley and T. M. Liggett. "Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and voter model". *Annals of Probability* **3**.4 (1975), 643–663.

[3] T. M. Liggett. Berlin, Heidelberg: Springer, 1999.

[4] F. Herrerías-Azcué and T. Galla. "Consensus and diversity in multistate noisy voter models". *Physical Review E* **100** (2 2019), 022304.

[5] M. Doniec, A. Lipiecki, and K. Sznajd-Weron. "Consensus, polarization and hysteresis in the three-state noisy q-voter model with bounded confidence". *Entropy* **24**.7 (2022), 983.

[6] M. Mobilia. "Polarization and consensus in a voter model under time-fluctuating influences". *Physics* **5**.2 (2023), 517–536.

[7] A. Vendeville, S. Zhou, and B. Guedj. "Discord in the voter model for complex networks". *Physical Review E* **109** (2 2024), 024312.

[8] M. Wołoszyn, T. Masłyk, S. Pająk, and K. Malarz. "Universality of opinions disappearing in sociophysical models of opinion dynamics: From initial multitude of opinions to ultimate consensus". In preparation. 2024.

[9] K. Sznajd-Weron and J. Sznajd. "Opinion evolution in closed community". *International Journal of Modern Physics C* **11**.06 (2000), 1157–1165.

[10] I. Chang. *International Journal of Modern Physics C* **12** (2001), 1509.

[11] R. Ochrombel. *International Journal of Modern Physics C* **12** (2001), 1091.

[12] C. Schulze. *International Journal of Modern Physics C* **14** (2003), 95.

[13] J. M. Darley and B. Latané. "Bystander intervention in emergencies—Diffusion of responsibility". *Journal of Personality and Social Psychology* **8**.4P1 (1968), 377–383.

[14] B. Latané and S. Harkins. "Cross-modality matches suggest anticipated stage fright a multiplicative power function of audience size and status". *Perception & Psychophysics* **20**.6 (1976), 482–488.

[15] B. Latané and S. Nida. "Ten years of research on group size and helping". *Psychological Bulletin* **89**.2 (1981), 308–324.

[16] A. Nowak, J. Szamrej, and B. Latané. "From private attitude to public opinion: A dynamic theory of social impact". *Psychological Review* **97**.3 (1990), 362–376.

[17] J. A. Hołyst, K. Kacperski, and F. Schweitzer. "Social Impact Models of Opinion Dynamics". *Annual Reviews of Computational Physics IX*. Ed. by D. Stauffer. Singapore: World Scientific, 2011, 253–273.

[18] P. Bańcerowski and K. Malarz. "Multi-choice opinion dynamics model based on Latané theory". *The European Physical Journal B* **92**.10 (2019), 219.

[19] K. Malarz and T. Masłyk. "Phase diagram for social impact theory in initially fully differentiated society". *Physics* **5**.4 (2023), 1031–1047.

[20] M. Dworak and K. Malarz. "Vanishing opinions in Latané model of opinion formation". *Entropy* **25**.1 (2023), 58.

[21] A. Kowalska-Styczeń and K. Malarz. "Noise induced unanimity and disorder in opinion formation". *Plos One* **15**.7 (2020), e0235313.

[22] F. Heider. "Attitudes and cognitive organization". *The Journal of Psychology* **21**.1 (1946), 107–112.

[23] D. Cartwright and F. Harary. "Structural balance: A generalization of Heider's theory". *Psychological Review* **63**.5 (1956), 277–293.

[24] K. Malarz, M. Wołoszyn, and K. Kułakowski. "Towards the Heider balance with a cellular automaton". *Physica D* **411** (2020), 132556.

[25] K. Malarz and J. A. Hołyst. "Mean-field approximation for structural balance dynamics in heat bath". *Physical Review E* **106**.6 (2022), 064139.

[26] K. Malarz and M. Wołoszyn. "Expulsion from structurally balanced paradise". *Chaos* **30**.12 (2020), 121103.

[27] K. Malarz and K. Kułakowski. "Heider balance of a chain of actors as dependent on the interaction range and a thermal noise". *Physica A* **567** (2021), 125640.

[28] K. Malarz and K. Kułakowski. "Comment on 'Phase transition in a network model of social balance with Glauber dynamics'". *Physical Review E* **103**.6 (2021), 066301.

[29] M. Wołoszyn and K. Malarz. "Thermal properties of structurally balanced systems on diluted and densified triangulations". *Physical Review E* **105**.2 (2022), 024301.

[30] K. Malarz and M. Wołoszyn. "Thermal properties of structurally balanced systems on classical random graphs". *Chaos* **33**.7 (2023), 073115.

[31] K. Kułakowski. "A note on temperature without energy—A social example". 2008. arXiv: 0807.0711 [physics.soc-ph].