

Automaty komórkowe

[http://home.agh.edu.pl/malarz/dyd/ak/
v. 2.718281828459045235360287](http://home.agh.edu.pl/malarz/dyd/ak/v.2.718281828459045235360287)

Zastosowania w modelowaniu pożarów lasów

Krzysztof Malarz

20 maja 2024

Terry Pratchett, *Ciekawe czasy*, Prószyński i S-ka (Warszawa 2003)

To motyl burz.

Skrzydełka ma nieco bardziej wystrzępione niż u pospolitych motyli. W rzeczywistości, dzięki fraktalnej naturze wszechświata, oznacza to, że te postrzępione brzegi są nieskończone — tak jak nieskończona jest dowolna linia brzegowa, mierzona z ostateczną, mikroskopową dokładnością. A jeśli nawet nie, to przynajmniej jest tak bliska nieskończonej, że w pogodne dni można stamtąd zobaczyć samą Nieskończoność.

[...]

Kwantowy motyl pogody (*Papilio tempestae*) ma całkiem zwyczajny żółty kolor, choć mandelbrotowskie desenie na skrzydełkach powinny wzbudzić zainteresowanie. Jego najbardziej niezwykłą cechą jest zdolność wpływania na pogodę.

Model Drossela i Schwabla [1] I

W modelu **Drossela i Schwabla** na sieci kwadratowej—przy założeniu otoczenia von Neumanna bądź Moore’a—stany pojedynczej komórki odpowiadają przebywaniu w niej trawy, drzewa bądź płonącego drzewa. Reguła automatu (aplikowana synchronicznie do wszystkich komórek) dana jest algorytmem:

Model Drossela i Schwabla [1] II

Model Drossela i Schwabla

- 1 w komórce porosłej trawą kiełkuje drzewo z prawdopodobieństwem p ,
- 2 drzewo nie mające w swoim otoczeniu płonącego drzewa zaczyna samoistnie płonąć (np. wskutek trafienia piorunem albo samozapłonu) z prawdopodobieństwem f ,
- 3 drzewo mające w swoim otoczeniu płonące drzewo zajmuje się od niego,
- 4 płonące drzewo wypala się, zamieniając w komórkę porosłą trawą.

Model Drossela i Schwabla [1] III

- Parametrem kontrolnym modelu jest stosunek p/f informujący o średniej ilości kiełkujących drzew pomiędzy dwoma kolejnymi uderzeniami pioruna.
- Las płonie szybko a rośnie wolno ($f \ll p$), albo można sobie wyobrazić modyfikację modelu, w której pożar rozprzestrzenia się tylko po koronach drzew — płoną tylko wysokie, tzn. stare.
- Można też uwzględniać kierunek wiatru, nachylenie stoku, wilgotność drzew, etc.
- Efektywność propagacji pożaru jest uzależniona od obecności klastrów drzew. Przez klastery należy rozumieć spójny zbiór komórek będących w tym samym stanie.

Model Drossela i Schwabla [1] IV

- Spójność oznacza, że od każdej do każdej komórki w klastrze dać się „dojść” przechodząc tylko przez inne komórki tego klastra a w jednym kroku wykonuje się ruch w obrębie przyjętego otoczenia.

Próg perkolacyjny

Czy istnieje taka gęstość drzew p_c , przy której jeden piorun jest w stanie podpalić „prawie cały” las?

Perkolacja I

- Sieć.
- Każdy węzeł jest zajęty z prawdopodobieństwem p bądź pusty z prawdopodobieństwem $1 - p$.
- Zajęte węzły należą do jednego klastra jeśli istnieje możliwość połączenia ich linią łamaną przechodzącą przez zajęte węzły.
- Dla niskich koncentracji p **nie** ma przejścia między jednym a drugim brzegiem — sieć odpowiada np. izolatorowi.
- Istnieje krytyczne pokrycie sieci p_c powyżej którego sieć staje się przewodnikiem. To prawdopodobieństwo p_c nazywamy *progiem perkolacyjnym*.

Perkolacja II

sieć	$p_c(site)$	sieć	$p_c(site)$
kwadratowa (2D)	0.5927460	trójkątna (2D)	1/2
kubiczna (3D)	0.3116080	diamant	0.4301
BCC (3D)	0.2459615	heksagonalna (2D)	0.697043
FCC (3D)	0.1992365	Kagomé	0.69704
4D	0.197	5D	0.141
FCC (4D)	0.0842	FCC (5D)	0.0431
6D	0.107	7D	0.089

http://en.wikipedia.org/wiki/Percolation_threshold

Perkolacja może być więc dobrym przykładem przejść fazowych: przewodnictwo/nadprzewodnictwo, ciecz/ciało stałe, magnetyk/paramagnetyk, zół/żel, i służyć do badania rozprzestrzeniania się pożarów i epidemii.

Perkolacja III

Perkolacja, p , p_c	$d = 2$	$d = 3$
parametr porządku P_∞ : β	5/36	0.417(3)
długość korelacji ξ : ν	4/3	0.875(8)
średni rozmiar klastra S : γ	43/18	1.795(5)
Magnetyzm, T , T_c		
parametr porządku m : β	1/8	0.32
długość korelacji ξ : ν	1	0.63
podatność χ : γ	7/4	1.24

Łatwe uogólnienie na dowolny wymiar sieci.

Perkolacja IV

Przejście fazowe charakteryzowane jest poprzez właściwości geometryczne klastrow w pobliżu parametru krytycznego

- prawdopodobieństwo, że węzeł należy do nieskończonego klastra:

$$P_{\infty} \propto (p - p_c)^{\beta}$$

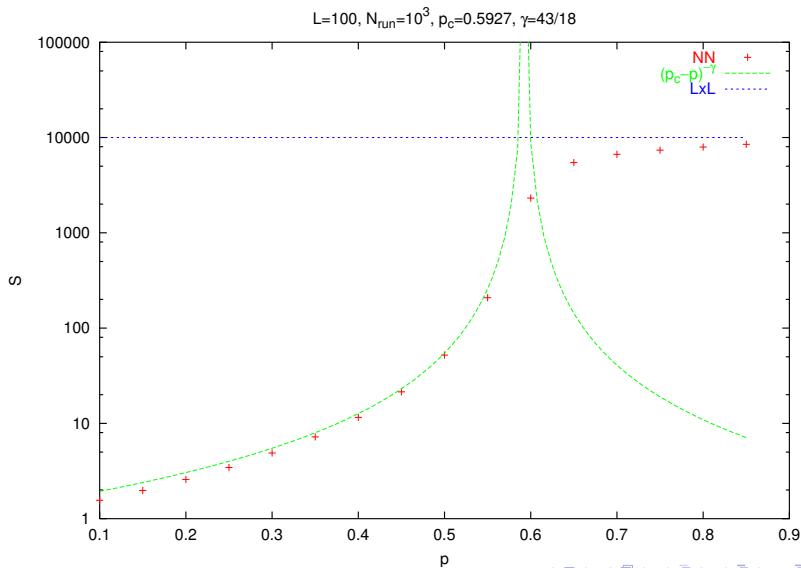
- długość korelacji:

$$\xi \propto |p - p_c|^{-\nu}$$

- masa klastra (średnia ilość węzłów w klastrze)

$$S \propto |p - p_c|^{-\gamma}$$

ξ i S są otrzymywane po uśrednieniu po wszystkich klastrach o skończonych rozmiarach.



Skalowanie elementów skończonych I

I ogólnie w pobliżu progu perkolacyjnego wielkości X charakteryzujące klastry podlegają prawu skalującemu:

$$X(p; L) = L^{-x} \cdot \mathcal{F}((p - p_c)L^{1/\nu}), \quad (1)$$

gdzie $\mathcal{F}(\cdot)$ jest funkcją skalującą, x wykładnikiem skalowania a ν jest wykładnikiem krytycznym związanym z długością korelacji ξ . Wartość $L^x \cdot X(p = p_c) = \mathcal{F}(0)$ *nie* zależy od rozmiaru liniowego L , co pozwala na łatwe wyznaczenie wartości p_c techniką poszukiwania przecięcia się wykresów $X(p)$ sporządzanych dla różnych L . Co więcej wykresy te można nałożyć na siebie odpowiednio przeskalowując osie, czyli umiejętnie dobierając wykładniki x i ν .

Skalowanie elementów skończonych II

Jeśli uda nam się zaproponować wielkość X , która ze swej natury do nałożenie się wykresów nie wymaga skalowania wzdłuż osi rzędnych to prawo (1) da się przepisać jako:

$$X(p; L) = \mathcal{G}((p - p_C)L^{1/\nu}). \quad (2)$$

Taką wielkością jest np. *wrapping probability* $W(p, L)$ mówiące o prawdopodobieństwie tego, że w układzie zaobserwujemy klaster łączący przeciwległe „krawędzie” układu.

Brak konieczności skalowania wzdłuż „osi y ” bierze się stąd, że $W(p \rightarrow 0, L) = 0$ i $W(p \rightarrow 1, L) = 1$.

Skalowanie elementów skończonych IV

Dokładnie taką metodykę poszukiwania wartości krytycznej prawdopodobieństwa oglądaliśmy już dyskutując model Sznajdów: pokazywaliśmy, że to czy zwycięży opinia Czerwonych czy Niebieskich zależy od początkowego udziału ich opinii ($p_c = 1/2$) w grupie.

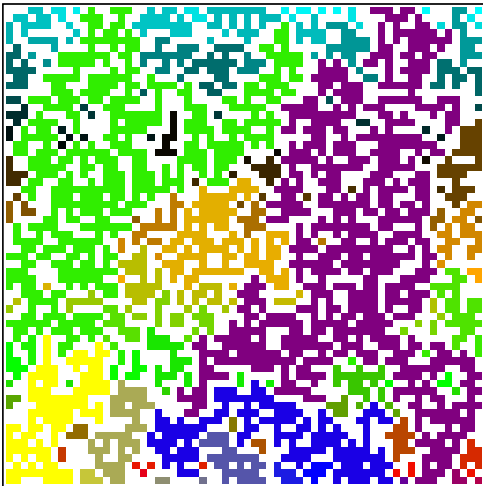
- Wykładniki krytyczne β , ν , γ są **uniwersalne** — nie zależą od szczegółów dotyczących sieci (kwadratowa czy trójkątna) czy typu perkolacji (węzłów czy wiązań) oraz przyjętego otoczenia a jedynie od wymiaru przestrzeni.
- Nieskończony klaster perkolacyjny dla $p = p_c$ ma podobnie jak dywan Sierpińskiego dziury wszelkich rozmiarów: jest samopodobny z dowolną skalą tego podobieństwa (większą niż długość jednostkowa ale mniejszą niż rozmiar sieci).

Algorytm Hoshena–Kopelmana I

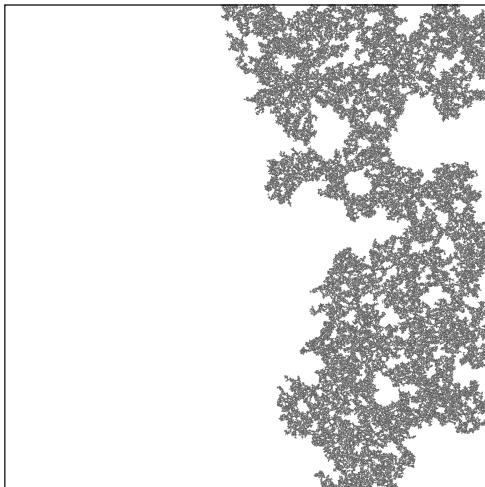
Istnieje wiele technik numerycznych pozwalających identyfikować klastry [3–6]. Jednym z nich jest algorytm Hoshena–Kopelmana [3].

- Algorytm przechodząc z od góry do dołu, od lewej do prawej za każdym razem napotykaając zajęty węzeł sieci stara się przydzielić mu etykietę.
- Etykiety przydziela sukcesywnie no chyba, że (zakładając otoczenie von Neumanna) jego lewy bądź górny sąsiad jest też zajęty.
- Te dwa węzły już mają wcześniej przydzielone etykiety i badany węzeł stanie się częścią któregoś z już istniejących klastrów.
- Jeśli oba węzły są zajęte to właśnie inwigilowany węzeł połączy dwa klastry: rekurencyjnie trzeba powymieniać dotychczasowe etykiety na mniejszą z etykiet komórek $(i - 1, j)$ i $(i, j - 1)$.

Algorytm Hoshena–Kopelmana II



Algorytm Hoshena–Kopelmana IV



Pożary a perkolacja I

W kontekście pożarów lasów szczególnie nas interesuje rozkład $\mathcal{N}(S)$ rozmiarów klastrow.

- Z pewnością byłoby miło móc przewidywać pożary lasów
- Równie atrakcyjnym celem byłoby choć oszacowanie ryzyka pożarów lasów w danym roku znając statystykę pożarów w latach poprzednich.
- Oczywiście rzeczywiste eksperymentowanie w tej sprawie raczej nie wchodzi w rachubę.
- Jednak posiadamy takie dane „eksperymentalne” w statystykach strażników lasu czy zakładów ubezpieczeniowych.
- Modelowy las stanowi siatka kwadratowa.
- Każda komórka może być porośła trawą bądź drzewem z prawdopodobieństwem p .

Pożary a perkolacja II

- Drzewa, zarówno już istniejące jak i świeżo wykiełkowane tworzą klastry o różnych rozmiarach.
- Przez klaster rozumiemy zbiór drzew mających sąsiadów w otoczeniu von Neumanna.
- Odwzorowanie $p_n \rightarrow p_{n+1}$ (gdzie n numeruje lata) jest złożeniem dwóch funkcji:

- Pierwsza

$$p \rightarrow p + rp(1 - p) \quad (3)$$

opisuje okres wzrostu (pojawiania się drzew) ($0 \leq r \leq 1$).

- Potem następuje czas pożarów:

$$p \rightarrow p - S(p). \quad (4)$$

Pożary a perkolacja III

- Średnia gęstość drzew na siatce

$$S(p) = \frac{1}{L^2} \sum_i w_i s_i \quad (5)$$

może być wyznaczona na dwa sposoby:

$$w'_i = s_i / L^2 \quad \text{bądź} \quad w''_i = s_i / \sum_i s_i.$$

- Przyjęcie wag w' oznacza, że piorun czasami będzie trafiał w trawę nie wywołując pożaru (jak w modelu Drossela i Schwabla).
- Natomiast wagi w'' odpowiadają intencjonalnemu wzniesieniu pożarów przez podpalaczy.

Pożary a perkolacja IV

- Do ustalenia rozkładu prawdopodobieństwa napotkania klastra o rozmiarze s_i używamy algorytmu Hoshena–Kopelmana.
- Symulacja jest prowadzona na sieci kwadratowej o rozmiarze $10^3 \times 10^3$.
- Odwzorowanie $p_n \rightarrow p_{n+1}$ dla każdego p jest uzyskiwane poprzez uśrednieni po setce niezależnych realizacji sieci (tj. przypadkowego rozkładu drzew na niej).
- Odwzorowanie $p_n \rightarrow p_{n+1}$ tworzymy łącząc prostymi sąsiednie 1001 punktów uzyskanych z symulacji.
- Odwzorowanie $p_n \rightarrow p_{n+1}$ nie pozwoli nam co prawda na rekonstrukcję dynamiki frontu pożaru (jak to czyni AK) a raczej pozwoli symulować statystyki „gęstości” drzew w kolejnych latach n .

Dopasowanie $p_n \rightarrow p_{n+1}$ dla wag w' (do analizy diagramu bifurkacyjnego)

$$H(p) = p + rp(1 - p)$$

$$G(p) = \begin{cases} 0.1 \exp[100(0.6 - p)] + 0.4\sqrt{1 - p} & \iff p > 0.6 \\ p & \iff p \leq 0.6 \end{cases} \quad (6)$$

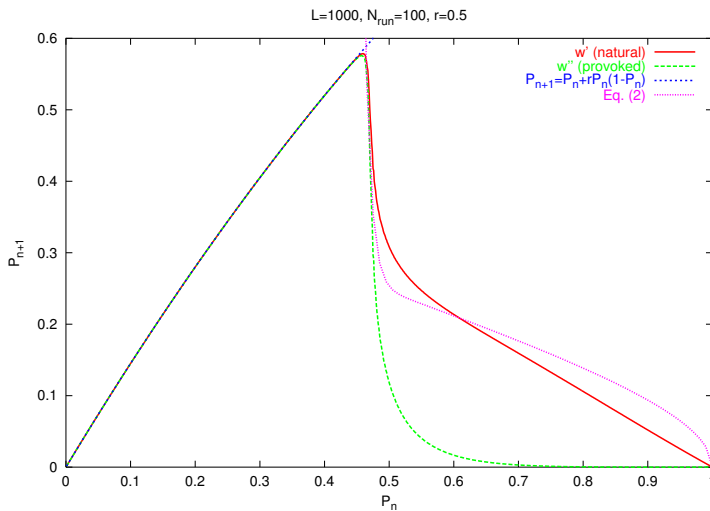
$$p_{n+1} = G(H(p_n))$$

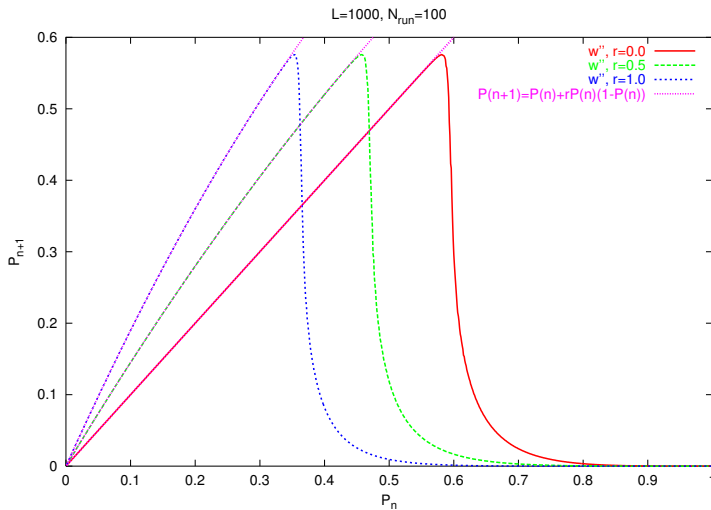
Dopasowanie $p_n \rightarrow p_{n+1}$ dla wag w'' (do analizy rozkładu rozmiarów pożarów)

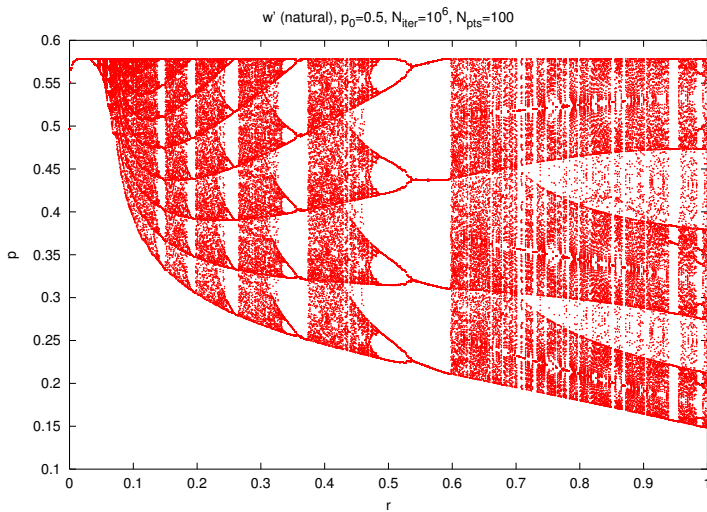
$$H(p) = p + rp(1 - p)$$

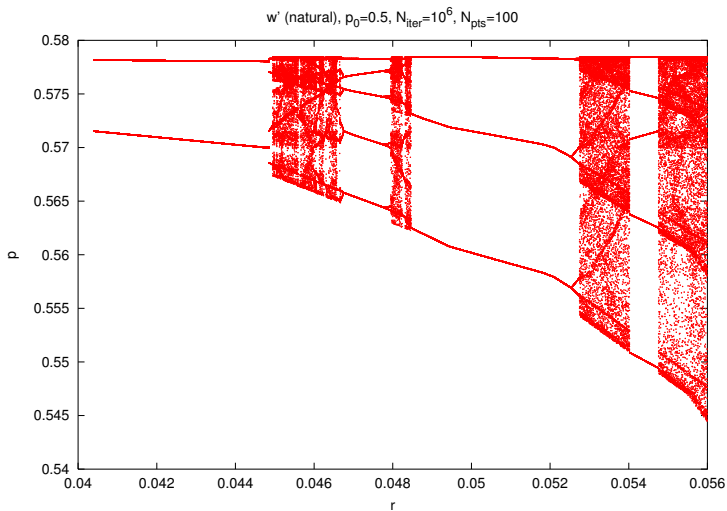
$$G(p) = \begin{cases} p_c \exp(-12.735\sqrt{p - p_c}) & \Longleftrightarrow p > p_c \\ p & \Longleftrightarrow p \leq p_c \end{cases} \quad (7)$$

$$p_{n+1} = G(H(p_n))$$



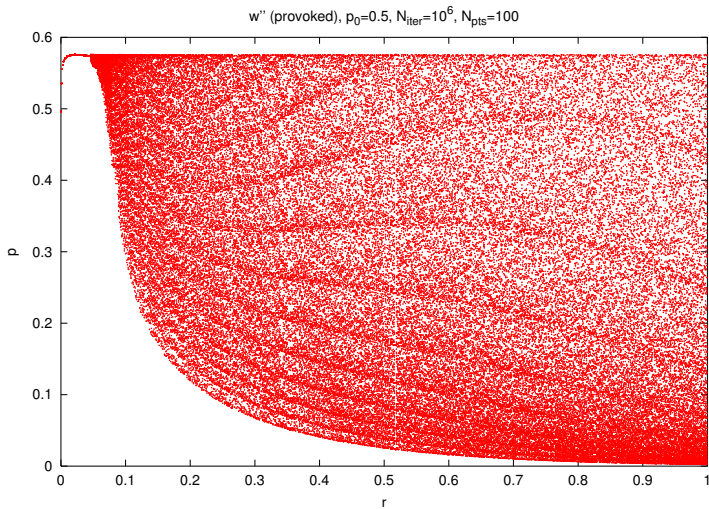






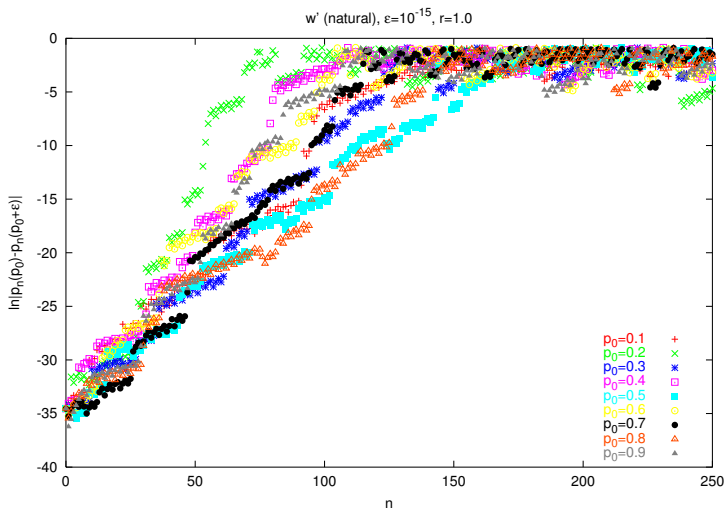
Twierdzenie Sharkovskiiego

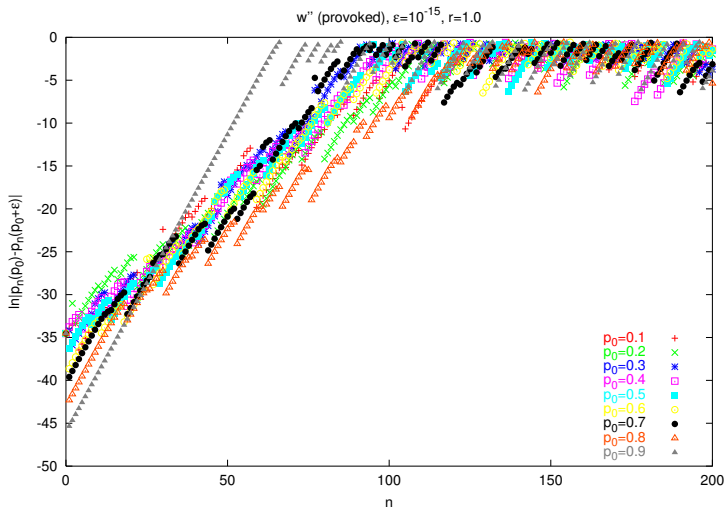
Wyłapanie cyklu granicznego o długości trzy dowodzi — zgodnie z twierdzeniem Sharkovskiiego — iż, w układzie pojawią się cykle graniczne o wszystkich możliwych długościach.



Wykładnik Lyapunova

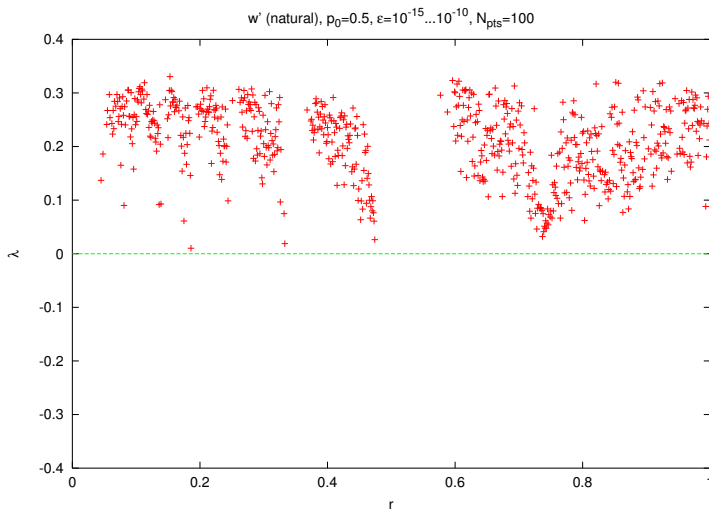
Ewolucja czasowa różnicy $\ln |p_n(p_0, t) - p_n(p_0 + \varepsilon, t)|$ dla dwóch trajektorii różniących się o ε w początkowej gęstości drzew p_0 .

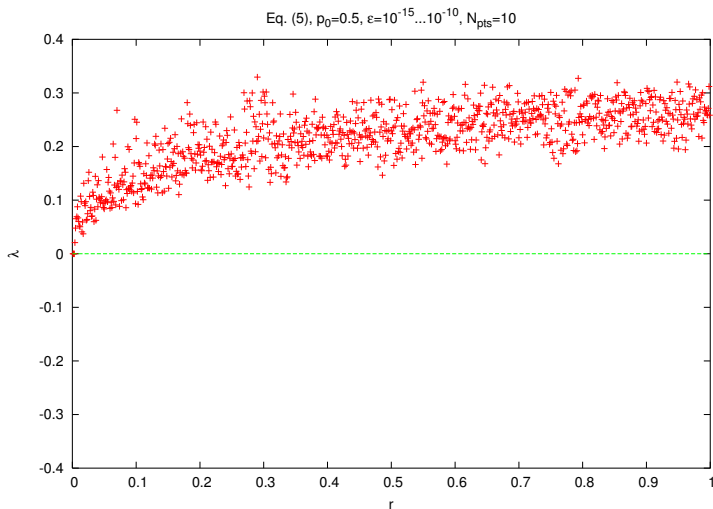


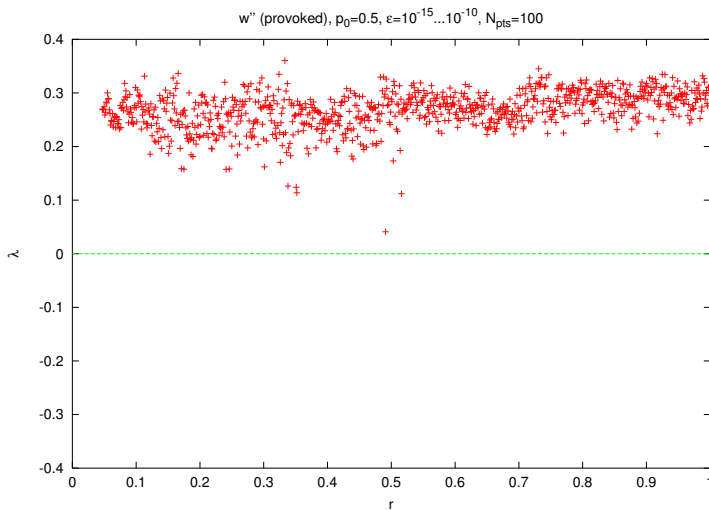


Współczynnik Lyapunova

Widać, że trajektorie rozjeżdżają wykładniczo z czasem. Tempo tego uciekania od siebie trajektorii określa współczynnik Lyapunova λ . Jego dodanie wartości określają obszary w których układ jest chaotyczny λ jego ujemne wartości zgadzają się z obszarami okien stabilności ujawnionych na diagramach bifurkacyjnych.

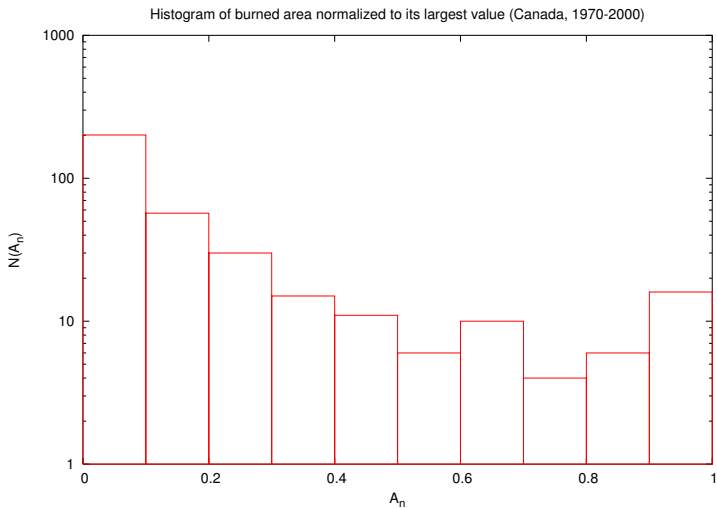


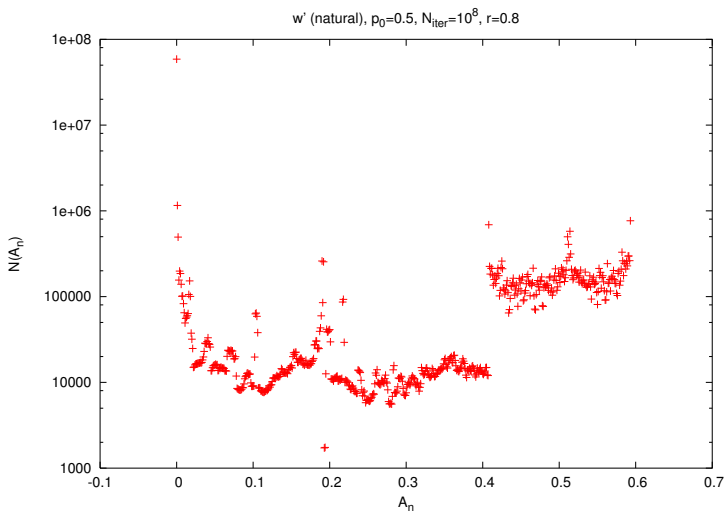


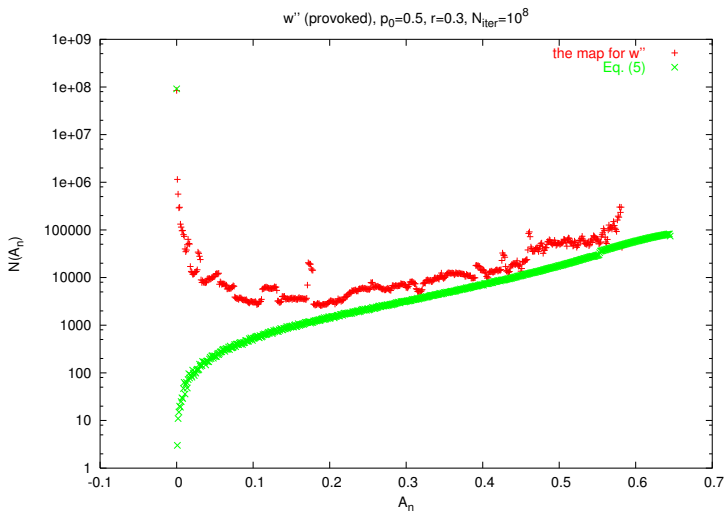


Rozkłady rozmiarów pożarów

- Dla pożarów o dużych rozmiarach histogram $\mathcal{N}(S_n)$ daje się dopasować zależnością wykładniczą.
- Małe ale skończone pożary są ignorowane w przybliżeniu analitycznym (7).
- Dla danych „eksperymentalnych” (Kanada, 1970–2000), histogramy zostały przeskalowane do wartości największego pożaru zaobserwowanego na danym obszarze.

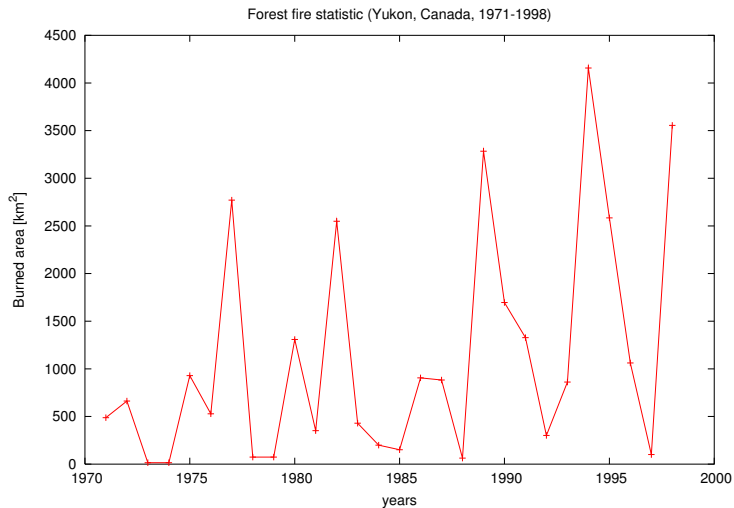


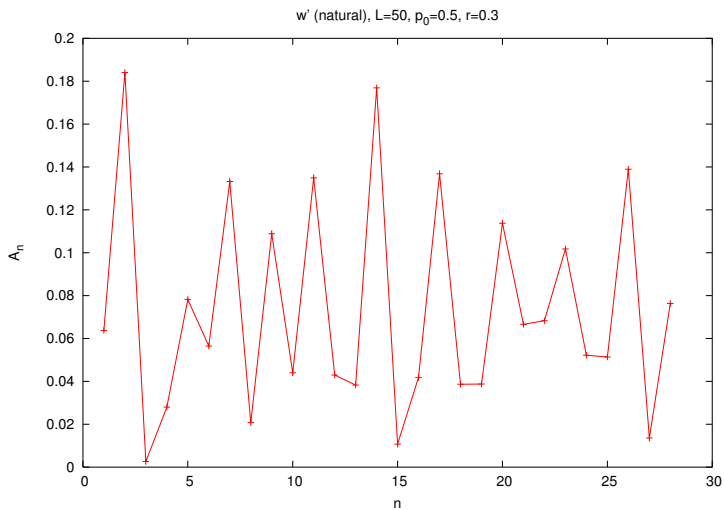


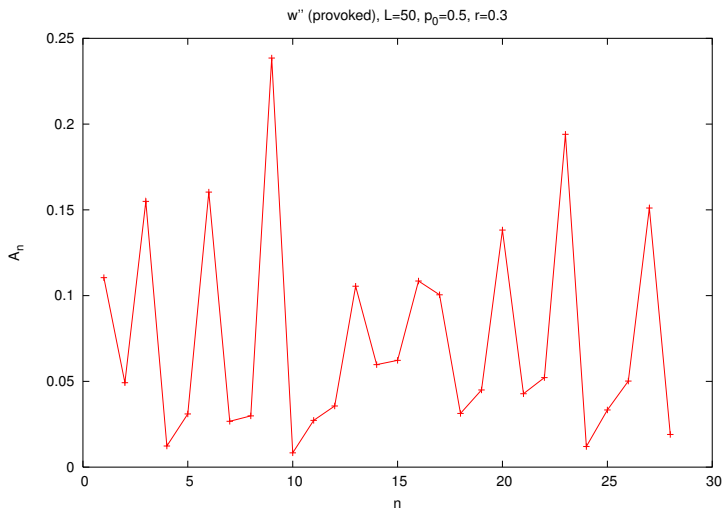


Porównanie z danymi „eksperymentalnymi”

- Kilka czynników (jak wilgotność, ukształtowanie terenu, etc.) nie mają swoich bezpośrednich odpowiedników w podejściu średniopółowym.
- Można oczekiwać, że czynniki te dodają rodzaj „szumu” nieobecnego w deterministycznych odwzorowaniach
 $p_n \rightarrow p_{n+1}$.
- „Szum” ten możemy próbować odtworzyć zmniejszając rozmiar modelowanego lasu ($L = 10^3 \rightarrow L = 50$).











Wnioski [7, 8]

- Jeśli deterministyczne podejście średniopolewe w granicy termodynamicznej wskazuje na zachowanie na chaotyczne zachowanie układu to trudno sobie wyobrazić jakąkolwiek inną technikę która dawałaby kontrolowane rozwiązanie.
- Udało się (co prawda tylko jakościowo) odtworzyć „eksperymentalne” statystyki pożarów.
- Zarówno diagramy bifurkacyjne jak i wykładniki Lyapuova wskazują na chaotyczność ewolucji czasowej pożarów lasów.
- Znaczy to, że ich przewidywanie w długiej skali czasu jest niemożliwe.
- Koronnym (ewolucyjnym) dowodem na chaotyczność pożarów jest przypadek sekwoi.

- [1] B. Drossel and F. Schwabl. *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992), 1629.
- [2] D. Stauffer and A. Aharony. *Introduction to Percolation Theory*. 2nd ed. London: Taylor and Francis, 1994.
- [3] J. Hoshen and R. Kopelman. “Percolation and cluster distribution. 1. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm”. *Physical Review B* **14.8** (1976), 3438–3445.
- [4] P. L. Leath. *Phys. Rev. B* **14** (1976), 5046.
- [5] M. E. J. Newman and R. M. Ziff. “Fast Monte Carlo algorithm for site or bond percolation”. *Physical Review E* **64.1** (2001), 016706.
- [6] I. V. Torin. “New algorithm to test percolation conditions within the Newman–Ziff algorithm”. *International Journal of Modern Physics C* **25.11** (2014), 1450064.

- [7] K. Malarz, S. Kaczanowska, and K. Kułakowski. “Are forest fires predictable?” *International Journal of Modern Physics C* 13.8 (2002), 1017–1031.
- [8] K. Malarz, S. Kaczanowska, and K. Kułakowski. “Chaotic dynamics of forest fires”. *Frontiers on Nonlinear Dynamics* 3 (2004), 334–343.