Odpowiedzi i wskazówki — Zestaw 2

Mechanika - 2

WMS — Matematyka, rok II

1. Proszę zapisać II zasadę dynamiki Newtona. Otrzymane równianie różniczkowe proszę rozwiązać ze względu na wychylenie z położenia równowagi tradycyjnymi metodami.

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

$\omega = 2\pi/T$ — częstość kołowa drgań, T — okres, A — amplituda drgań, φ — faza początkowa.

2. Piszemy II zasadę dynamiki Newtona dla bryły sztywnej dla naszego wahadła. Otrzymane równanie ruchu można rozwiązać analitycznie tylko po przyjęciu założenia o niewielkich wychyleniach. Równanie i metoda jego rozwiązania bardzo podobna do tych z poprzedniego zadania...

3. Proszę wprowadzić gęstość liniową masy. Zapisać II zasadę dynamiki Newtona dla sznurka. Siłą powodującą ruch jest *tylko* część sznurka aktualnie zwisająca. Otrzymane wówczas równanie różniczkowe znów najprościej rozwiązać poprzez równanie charakterystyczne.

$$x(t) = \frac{l}{8}\left[\exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right].$$

Czas spadku:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln(4 + \sqrt{15}).$$

4. Ruch kamienia jest opisywany dwoma różnymi równaniami do zetknięcia się z taflą wody i już w samej wodzie. W wodzie pojawia się siła oporu którą (oprócz ciężaru) należy uwzględnić w równaniu Newtona. Wygodniej jest szukać najpierw zależności prędkości od czasu. Otrzymane równanie niejednorodne rozwiązujemy poprzez *uzmiennienie stałej.*

$$v(t) = \begin{cases} gt^2/2 & \Leftrightarrow t \le \sqrt{2d/g} \\ mg/k + (\sqrt{2gd} - mg/k)\exp\left[-k/m \cdot (t - \sqrt{2d/g})\right] & \Leftrightarrow t \ge \sqrt{2d/g} \end{cases}$$

5. Jak zwykle należy skorzystać z II zasady dynamiki Newtona. Otrzymane równanie (znów wygodniej rozwiązywać je ze względu na prędkość a nie na położenie) rozwiązujemy poprzez rozdzielenie zmiennych. Następnie należy znaleźć czas po jakiem prędkość samochodu maleje do połowy. Drogę jaką w tym czasie przebywa samochód można znaleźć po przekształceniu definicji prędkości...

$$s = \frac{m}{k} \ln 2.$$

6. W polu centralnym moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ jest zachowany. Proszę wyrazić L we współrzędnych biegunowych a następnie korzystając dwukrotnie ze wzoru na różniczkowanie funkcji złożonej:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi}$$

wyprowadzić wzór Bineta:

$$\vec{F} = -\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] \cdot \hat{r}.$$

Teraz wystarczy znać równanie toru $r(\varphi)$...

$$F_r = -\frac{8L^2R^2}{mr^5}.$$

7. Proszę skorzystać z zasady zachowania pędu.

$$V = \frac{mv}{M+m}.$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{M}{(M+m)}.$$

8. Proszę skorzystać ze (spełnionej w tym przypadku) zasady zachowania pędu oraz definicji zderzenia sprężystego.

$$V = \frac{2m}{M+m}v_0, \qquad v = \frac{M-m}{M+m}v_0.$$

Krzysztof Malarz, Kraków, 23 maja 2002