Odpowiedzi i wskazówki — Zestaw 4

Relatywistyka

WMS — Matematyka, rok II

1. Zakładamy liniową postać transformacji (bo taki jest przypadek graniczny tj. transformacje Galileusza oraz ponieważ to jedyne przekształcenie przeprowadzające prostą w prostą).

$$\begin{cases} x' = Ax + Bt \\ t' = Mx + Nt \end{cases}$$

Po przejściu na krótkie odcinki czasu i długości oraz po dokonaniu formalnego podzielenia tych równań stronami dostaniemy wzory na transformacje prędkości (precyzyjniej — jej x-owej składowej) między układami. Teraz proszę rozważyć trzy szczególne przypadki:

- ciała spoczywającego w pierwszym układzie,
- ciała spoczywającego w drugim układzie,
- impulsu świetlnego.

Z takiego układu proszę wyznaczyć zależność $B(A)$, $M(A)$ i $N(A)$. A można wyznaczyć korzystając z symetrii między układami — co w jednym porusza się w prawo z pewną prędkością — porusza się w drugim z prędkością przeciwną...

$$\begin{cases} x' &= \gamma(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - \frac{u}{c^2}x) \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

2. Z transformacji Lorentza mamy:

$$\begin{cases} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - u\Delta t) \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z \\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x) \end{cases}$$

$$(\Delta s')^2 = \Delta s^2$$

3. Najwygodniej dokonać tego sprawdzenia korzystając z niezmienniczości interwału czasoprzestrzennego. Proszę wyznaczyć Δs w „swoim" układzie. Następnie proszę sprawdzić czy układy w których $\Delta x' = 0$ bądź $\Delta t' = 0$ mają choćby cień szansy na taki sam $\Delta s'$...

- tak
- nie

4. Proszę zapisać moment i miejsce kreacji i rozpadu cząstki w jej ukłdazie własnym (to z definicji układ w którym cząstka spoczywa). Następnie korzystając z transformacji Lorentza znaleźć współrzędne tych zdarzeń w układzie laboratoryjnym.

$$\begin{cases} \Delta x &= \gamma u t_\pi, \\ \Delta t &= \gamma t_\pi. \end{cases}$$

5. Zmiana długości fali świetlnej (a więc i koloru) obserwowanej przez kierowce jest wynikiem relatywistycznego efektu Dopplera.

$$\beta = \frac{v}{c} \approx 0.16$$

Decyzja kontroli ruchu była więc w pełni uzasadniona.

6. Niezmienniczość interwału czasoprzestrzennego to jednak świetna rzecz. Znów z niej skorzystamy...

$$\Delta x_r^2 = c^2(\Delta t_r^2 - \Delta t_s^2)$$

7. Relatywistyczny wzór na energię kinetyczną E_K dany jest różnicą energii całkowitej E_C i spoczynkowej E_0. W pierwszym przypadku energię kinetyczną liczymy ze wzoru

$$E_K = m_0c^2(\gamma - 1),$$

w drugim z niezmiennika relatywistycznego

$$E_K = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2.$$

Proszę wyrażenia na E_k rozwianąć w szereg Maclaurina.

- Dla energii kinetycznej wyrażonej przez prędkość ciała:

$$f(x) = (1-x)^{-1/2}$$

$$E_K = m_0c^2(f(v^2/c^2) - 1) = \frac{1}{2} \cdot m_0v^2 + \frac{3}{8} \cdot \frac{m_0v^4}{c^2} + \frac{5}{16} \cdot \frac{m_0v^6}{c^4} + \dots$$

- Dla energii kinetycznej wyrażonej przez pęd ciała:

$$f(x) = (1+x)^{1/2}$$

$$E_K = m_0c^2(f(p^2/m_0^2c^2) - 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{m_0} - \frac{1}{8} \cdot \frac{p^4}{m_0^3c^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{p^6}{m_0^5c^4} + \dots$$

8. Proszę znaleźć względną prędkość między układami (*nie* jest nią $2u$)! Długości obu prętów ulegają lorentzowskiej kontrakcji w kierunku ruchu:

$$l = l_0\frac{c^2 - v^2}{c^2 + v^2}.$$

Krzysztof Malarz, Kraków, 23 maja 2002