Odpowiedzi i wskazówki — Zestaw 5

Elektromagnetyzm - 1

WMS — Matematyka, rok II

1. Proszę skorzystać z zasady superpozycji.
   - Gdy wszystkie ładunki są dodatnie:
     - w środku trójkąta
     $$E = 0, \qquad V = \frac{3\sqrt{3}q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$
     - w środku jednego z boków trójkąta
     $$E = \frac{q}{3\pi\varepsilon_0 a^2}, \qquad V = \frac{(6+\sqrt{3})q}{6\pi\varepsilon_0 a}$$
   - Gdy jeden z ładunków zamieniono na ujemny:
     - w środku trójkąta
     $$E = \frac{3q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}, \qquad V = \frac{\sqrt{3}q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$
     - w środku jednego z boków trójkąta
     $$E = \frac{q}{3\pi\varepsilon_0 a^2}, \qquad V = \frac{(6-\sqrt{3})q}{6\pi\varepsilon_0 a}$$
2. Wprost z definicji gradientu mamy
   $$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \vec{a}$$
   oraz
   $$\nabla(1/r) = -\vec{r}/r^3.$$
3. Proszę skorzystać z prawa Gaussa. Cała trudność sprowadza się do odpowiedniego wyboru powierzchni gaussowskiej przez którą liczymy strumień wektora natężenia (czy jak kto woli indukcji) pola. A wybór powierzchni dyktuje symetria problemu — przekładająca się na symetrię pola. Tu może być to rozsądnie zorientowany względem naładowanej płaszczyzny prostopadłościan lub walec.

   Dla jednej płaszczyzny $E = \tau/2\varepsilon_0$. Przy dwóch płaszczyznach z różnoimiennymi gęstościami ładunku proszę skorzystać z zasady superpozycji. Pole $E = \tau/\varepsilon_0$ między płaszczyznami oraz $E = 0$ w pozostałej części przestrzeni.

   Proszę nie zapomnieć, że $\vec{E}$ jest wektorem — oprócz długości trzeba określić jego kierunek i zwrot...
4. Znów proszę skorzystać z prawa Gaussa. Symetria rozkładu ładunków dyktuje symetrię pola a ta dyktuje *rozsądny* wybór powierzchni gaussowskiej (tym razem raczej nie będzie nią ani brzeg prostopadłościanu ani walca).

   Proszę rozważyć dwa przypadki $r < R$ i $r > R$. W pierwszym proszę zauważyć, że ładunek zgromadzony *wewnątrz* powierzchni gaussowskiej zależy od r — w drugim *już* nie.
   - $r < R$:
   $$E = \frac{\tau_0 r^2}{4\varepsilon_0 a}$$
   - $r > R$:
   $$E = \frac{\tau_0 R^4}{4\varepsilon_0 a r^2}$$

   Potencjał liczymy jako $V = -\int E(r)\mathrm{d}r$
   - $r < R$:
   $$V = -\frac{\tau_0}{4a\varepsilon_0}\cdot\frac{r^3}{3} + C_1$$

- $r > R$:

$$V = \frac{\tau_0 R^4}{4a\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + C_2$$

Stałe C_1 i C_2 należy dobrać tak, aby następowało *zszycie* potencjału dla $r = R$: $V(r \to R^-) = V(r \to R^+)$:

$$C_2 = 0, \qquad C_1 = \frac{\tau_0 R^3}{3a\varepsilon_0}$$

5. Tym razem należy skorzystać z... prawa Gaussa.

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V = -\int E(r)\mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + V_0$$

Krzysztof Malarz, Kraków, 7 maja 2004