Odpowiedzi i wskazówki — Zestaw 6

Elektromagnetyzm - 2

WMS — Matematyka, rok II

1. Równania Maxwella

   - w postaci całkowej:

   $$\oint_\Gamma \vec{E} \circ d\vec{l} = -\iint_\Sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \circ d\vec{\sigma}$$

   $$\oint_\Gamma \vec{H} \circ d\vec{l} = \iint_\Sigma \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \circ d\vec{\sigma}$$

   gdzie powierzchnia Σ jest rozpięta na konturze Γ: $\Gamma = \partial\Sigma$.

   $$\iint_\Sigma \vec{D} \circ d\vec{\sigma} = \iiint_V \rho d\tau$$

   $$\iint_\Sigma \vec{B} \circ d\vec{\sigma} = 0$$

   gdzie objętość V jest ograniczona powierzchnią Σ: $\Sigma = \partial V$.

   - w postaci różniczkowej:

   $$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

   $$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

   $$\nabla \circ \vec{D} = \rho$$

   $$\nabla \circ \vec{B} = 0$$

   Do przejście z wersji całkowej do różniczkowej dobrze znać

   - twierdzenie Ostrogradskiego–Gaussa:

   $$\iint_\Sigma \vec{A} \circ d\vec{\sigma} = \iiint_V \nabla \circ \vec{A} d\tau$$

   - twierdzenie Stokesa:

   $$\oint_\Gamma \vec{A} \circ d\vec{l} = \iint_\Sigma (\nabla \times \vec{A}) \circ d\vec{\sigma}$$

   Ponieważ mamy $\vec{E} = -\nabla V$, to gdy pola nie zależą od czasu i nie płyną żadne prądy, potencjał pola elektrostatycznego spełnia równanie Poissona:

   $$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

   a przy nieobecności również ładunków — równanie Laplace'a:

   $$\nabla^2 V = 0.$$

2. Proszę skorzystać z równań Maxwella oraz tożsamości $\nabla \circ (\nabla \times \vec{A}) = 0$.

3. Wokół przewodnika z prądem tworzy się pole magnetyczne. Na przewodnik umieszczony w takim polu działa siła elektrodynamiczna.

   $$F = Bil = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi a} l$$

   $$I_1 = I_2 = 1 \text{ [A]}, \quad a = l = 1 \text{ [m]} \iff F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ [N]}$$

4. Na ramkę działa siła elektrodynamiczna $F = Bil$.

   - Dla ramki leżącej w jednej płaszczyźnie z przewodem:

   $$F = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \cdot \frac{c + a/2 - c + a/2}{c^2 - (a/2)^2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi(c^2 - a^2/4)}$$

   - Gdy ramka jest do tej płaszczyzny prostopadła:

   $$M = M_1 + M_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 abc}{2\pi(c^2 + a^2/4)}$$

5. Proszę skorzystać z prawa Ampera (dla prostej) i prawa Biota–Savarta (dla okręgu)

   $$H = \frac{i}{2\pi R}(1 + \pi).$$

   Proszę nie zapomnieć, że $\vec{H}$ jest wektorem — ma więc oprócz długości jeszcze kierunek i zwrot...

6. Mimo, że ruch ramki odbywa się w stałym polu magnetycznym zmienia się strumień indukcji pola $\vec{B}$ przenikający przez dowolną powierzchnię rozpiętą na prostokącie przewodów i poprzeczki. Jak wynika z równań Maxwella — generuje to siłę elektromotoryczną w obwodzie i w konsekwencji pojawienie się prądu. Proszę zastanowić się jakie wówczas siły działają na poruszająca się ramkę w polu. Druga zasada dynamiki Newtona pozwala zapisać wówczas

   $$m\frac{d^2x}{dt^2} = Q - F.$$

   Równanie to najwygodniej rozwiązać ze względu na prędkość poprzeczki:

   $$v(t) = \frac{gR}{B^2 l^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{B^2 L^2}{R} t\right)\right].$$

Krzysztof Malarz, Kraków, 7 maja 2004