Odpowiedzi i wskazówki — Zestaw 7

Teoria obwodów

WMS — Matematyka, rok II

1.

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + r_w}$$

$$U_1 = IR_1 = \frac{\varepsilon R_1}{R_1 + R_2 + r_w}$$

2. • z zasady superpozycji:

$$\begin{cases} i'_1 = i'_2 + i'_3 \\ \varepsilon_2 + U_2 = U \\ U = -U_1 \end{cases}$$

$$i'_3 = \frac{\varepsilon_2 R_1}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2}$$

$$\begin{cases} i''_1 = i''_2 + i''_3 \\ \varepsilon_1 = U_1 + U \\ U = U_2 \end{cases}$$

$$i''_3 = \frac{\varepsilon_1 R_2}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2}$$

i ostatecznie

$$i_3 = i'_3 + i''_3 = \frac{\varepsilon_2 R_1 + \varepsilon_1 R_2}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2}.$$

• metodą prądów oczkowych:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R & -R \\ -r & R_2 + R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

Układ ten ze względu na prądy oczkowe I_1 i I_2 najwygodniej rozwiązać metodą wyznaczników:

$$I_1 = \frac{(R + R_2)\varepsilon_1 - R\varepsilon_2}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2}$$

$$I_2 = \frac{-(R + R_1)\varepsilon_2 + R\varepsilon_1}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2}$$

Prąd płynący w gałęzi R liczymy jako:

$$i_3 = I_1 - I_2 = \frac{\varepsilon_2 R_1 + \varepsilon_1 R_2}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2}$$

• metodą Thèvenina:

$$R_{AB} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\begin{cases} i_1 = -i_2 \\ \varepsilon_1 - U_1 = \varepsilon_2 - U_2 \end{cases}$$

$$U_0 = \varepsilon_1 - U_1 = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

$$i_3 = \frac{U_0}{R + R_{AB}} = \frac{\varepsilon_2 R_1 + \varepsilon_1 R_2}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2}$$

3. Przy zrównoważeniu mostka prąd w gałęzi z galwanometrem nie płynie i punkty na obu jego końcach mają ten sam potencjał:

$$I_2 R_a = I_1 R_x$$

$$I_1 R = I_2 R_b$$

$$R_x = \frac{a}{b} \cdot R$$

4.

$$U_C = \frac{q}{C}, \qquad \varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{1}{C}q = -L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

$$-\frac{1}{LC}q = \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2}$$

$$q(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

z warunkami początkowymi $q(t=0) = q_0$ i (milczącym) $\dot{q}(t=0) = 0$ (nie płynie prąd w obwodzie) skąd $A = q_0$ i $\varphi_0 = 0$ więc $q(t) = q_0 \cos\omega t$.

Wprowadzenie do układu oporu zmienia równanie wynikające z II prawa Kirchhoffa na:

$$U_C + U_R = \varepsilon_L$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Równanie charakterystyczne:

$$r^2 + 2\beta r + \omega^2 = 0$$

którego rozwiązanie zależy od współzawodnictwa β i ω:

- jeśli $\beta > \omega$ to $\Delta > 0$ i rozwiązania postaci

  $$q(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

  $$r_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$$

  i mamy do czynienia z sytuacją aperiodyczną a stałe C_1 i C_2 zależą od warunków początkowych.
- w przeciwnym wypadku dostajemy drgania tłumione:

  $$q(t) = C\exp(-\beta t)\sin(\omega t + \varphi_0)$$

  gdzie stałe C i φ_0 zależą od warunków początkowych.

5.

- dla cewki

  $$0 = U + \varepsilon_L = U_0 \sin\omega t - L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

  $$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{L}\sin\omega t$$

  $$i_L = -\frac{U_0}{\omega L}\cos\omega t = -I_0\cos\omega t = I_0\sin(\omega t - \pi/2)$$

  $$X_L = U_0/I_0 = \omega L$$
- dla kondensatora:

  $$\frac{q}{C} = U_C = U = U_0\sin\omega t$$

  $$\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = U_0\sin\omega t$$

  $$i_C = U_0\omega C\cos\omega t = I_0\cos\omega t = I_0\sin(\omega t + \pi/2)$$

  $$X_C = U_0/I_0 = 1/\omega C$$

6.

$$U = U_0\sin(2\pi f t)$$

z II prawa Kirchhoffa:

$$U + \varepsilon_L = U_C + U_R$$

co prowadzi do (nieprzyjemnego) równania różniczkowo-całkowego:

$$U_0\sin\omega t - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t + iR$$

Natomiast korzystając z metody liczb zespolonych mamy od ręki impedancję zastępczą układu (jak dla połączenia szeregowego)

$$\hat{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

i z prawa Ohma $\hat{U} = \hat{Z} \cdot \hat{I}$ amplitudę prądu liczymy jako:

$$I = |\hat{U}|/|\hat{Z}|.$$

Stąd prąd w obwodzie $\hat{I}$ można przedstawić jako sumę geometryczną (wektor) prądów $\hat{I} = \hat{I}_R + \hat{I}_C + \hat{I}_L$. Jest to wektor o amplitudzie

$$I_0 = U_0/|\hat{Z}| = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

wirujący z częstością kołową ω przesunięty w fazie w stosunku do wektora $\hat{U} = \hat{U}_R + \hat{U}_L + \hat{U}_C$ o

$$\varphi_0 = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Wartość prądu będzie maksymalna przy minimalnym $|\hat{Z}|$ a dla więc $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

7. Ciepło które trzeba dostarczyć do ogrzania wody $Q = mc_w\Delta T$ równa się pracy jaką wykona prąd elektryczny (zakładamy stałe napięcie sieci U):

$$Q = UI_1t_1 = \frac{U^2}{R_1}t_1 \to R_1 = \frac{U^2}{Q}t_1$$

$$Q = UI_2t_2 = \frac{U^2}{R_2}t_2 \to R_1 = \frac{U^2}{Q}t_2$$

- przy połączeniu szeregowym $R_s = R_1 + R_2$

$$Q = \frac{U^2}{R_s}t_s = \frac{U^2}{R_1 + R_2}t_s$$

$$t_s = t_1 + t_2$$

- przy połączeniu równoległym $R_r^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$

$$Q = \frac{U^2}{R_r}t_r = \frac{U^2(R_1 + R_2)}{R_1R_2}t_r$$

$$t_r = \frac{t_1t_2}{t_1 + t_2}$$

Krzysztof Malarz, Kraków, 30 maja 2003