Odpowiedzi i wskazówki — Zestaw 8

Grawitacja

WMS — Matematyka, rok II

1.
   - prawo powszechnego ciążenia:
   $$\vec{F}_G = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}_{12}$$
   - przyspieszenie grawitacyjne:
   $$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G}{m} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$
   $$g(r=R) = \frac{GM}{R^2} \approx 9.81\ [\mathrm{m/s^2}]$$
   - energia potencjalna:
   $$E_p = W_{r\to\infty} = -W_{\infty\to r} = -G\frac{Mm}{r}$$
   - potencjał:
   $$V = \frac{E_p}{m} = -\frac{GM}{r} = -\frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
   - pierwsza prędkość kosmiczna: siłę odśrodkową równoważy siła oddziaływania grawitacyjnego.
   $$v_1 = \sqrt{GM/R} = \sqrt{gR} \approx 7.9\ [\mathrm{km/s}]$$
   - druga prędkość kosmiczna: proszę skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej.
   $$v_2 = \sqrt{2}v_1 \approx 11.2\ [\mathrm{km/s}]$$

2. Znów proszę skorzystać z zasady zachowania energii...
$$v = \sqrt{2}v_0$$

3. Korzystamy z prawa Gaussa dla pola grawitacyjnego
$$\iint_\Sigma \vec{\gamma}\circ \mathrm{d}\vec{\sigma} = 4\pi G \iiint_V \rho \mathrm{d}\tau$$
$$\rho = \frac{3M}{4\pi(R_Z^3 - R_W^3)}$$
   - $r < R_W$
   $$M(r) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\gamma} = \vec{0}$$
   - $R_W < r < R_Z$
   $$M(r) = M\cdot\frac{r^3 - R_W^2}{R_Z^3 - R_W^3} \quad \rightarrow \quad \vec{\gamma}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\cdot\frac{r^3 - R_W^2}{R_Z^3 - R_W^3}\hat{r}$$
   - $r > R_Z$
   $$M(r) = M \quad \rightarrow \quad \vec{\gamma} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

4. Generatorem równań ruchu w mechanice klasycznej jest pewne prawo fizyczne pozwalające zapisać:
$$\ddot{x} = -\frac{GM(x)}{x^2}$$
$$\frac{M(x)}{M} = \frac{x^3}{R^3}$$
$$\ddot{x} = -\frac{GM}{R^3}x = -\omega^2 x$$
Równanie jest analogiczne jak w przypadku położenia ciała na sprężynie, czy ładunku na okładkach kondensatora w układzie LC — a więc równaniem oscylatora harmonicznego:
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Czas t przebycia drogi o długości połowy równika można sprawnie znaleźć żądając zrównoważenia sił działających na satelitę krążącego po orbicie o promieniu R

$$t = T/2.$$

5.
$$\vec{F} = -\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]\cdot\hat{r}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}, \qquad \vec{L} = \mathbf{const}$$

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

$$\vec{F} = -\frac{L^2}{mp}\frac{\hat{r}}{r^2},$$

co matematycznie wyraża treść pierwszego prawa Keplera.

Porównując wyznaczoną siłę F z prawem powszechnego ciążenia mamy

$$p = \frac{L^2}{GMm^2}.$$

Mimośród e możemy natomiast powiązać z całkowitą energią ciała E:

$$E = E_K + E_G = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{G^2M^2m^3e^2}{2L^2} - \frac{G^2M^2m^3}{2L^2}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$$

6.
$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2}r^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

Prędkość polowa

$$\dot{S} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}r^2\frac{L}{mr^2} = \frac{L}{2m}$$

Co przy stałości L wyraża treść drugiego prawa Keplera.

7. Policzmy pole jakie zakreśla promień wodzący planety w ciągu okresu obiegu elipsy

$$\int_0^T \dot{S}\mathrm{d}t = \frac{LT}{2m}.$$

Pole elipsy o półosiach a i b wynosi

$$S = \pi ab.$$

Stąd okres obiegu elipsy wynosi

$$T = \frac{2\pi abm}{L}.$$

Półosie elipsy są odpowiednio równe: $a = p/(1-e^2)$ oraz $b = a\sqrt{1-e^2}$.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \mathrm{const}$$

Co wyraża treść trzeciego prawa Keplera.

Krzysztof Malarz, Kraków, 23 maja 2002