

## Zadania z fizyki — Zestaw 8

### Grawitacja

WMS — Matematyka, rok II

1. Sformułować prawo powszechnego ciążenia. Znaleźć zależność przyspieszenia grawitacyjnego  $\vec{g}(\vec{r})$ , natężenia pola grawitacyjnego  $\vec{\gamma}(\vec{r})$ , energii potencjalnej  $E_p(\vec{r})$  oraz wartości pierwszej  $v_1$  i drugiej  $v_2$  prędkości kosmicznej dla planety o masie  $M$  i promieniu  $R$ . Oszacować ile wynosi przyspieszenie grawitacyjne przy powierzchni Ziemi. Ile wynosi pierwsza i druga prędkość kosmiczna dla Ziemi?
2. Do wysłania ciała na odległość jednego promienia od powierzchni pewnej planety potrzebna jest prędkość  $v_0$ . Jaką prędkość należy nadać temu ciału, aby wysłać je na nieskończenie wielką odległość od tej planety?
3. Znaleźć rozkład pola grawitacyjnego wytworzonego przez masę  $M$  równomiernie rozłożoną między dwiema współśrodkowymi sferami o promieniach  $R_w$  i  $R_z$  ( $R_w < R_z$ ).
4. Opisać ruch ciała w tunelu przechodzącym przez środek Ziemi.
  - Znaleźć czas lotu ciała od punktu o współrzędnej  $x = R$  do punktu o współrzędnej  $x = -R$ .
  - Pokazać, że czas ten jest równy czasowi jaki potrzebuje satelita krążący po kołowej orbicie o promieniu niewiele większym od promienia Ziemi na przebyciu połowy długości równika.

Założyć, że Ziemia jest jednorodną kulą o masie  $M$  i promieniu  $R$ , oraz warunki początkowe  $x_0 = R$  i  $v_0 = 0$ .

5. Korzystając z rozważań dotyczących wzoru Bineta (zestaw 2) pokazać, że ruch płaski po krzywych stożkowych

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

spowodowany jest siłą malejącą z kwadratem odległości od jej centrum (I prawo Keplera). Następnie korzystając z prawa powszechnej grawitacji oraz zasady zachowania energii powiązać  $p$  i  $e$  z momentem pędu planety  $L$  i jej energią mechaniczną  $E$ .

6. Korzystając z zasady zachowania momentu pędu (spełnionej dla ruchu w polu sił centralnych) oraz I prawa Keplera proszę wyprowadzić II prawo Keplera.
7. Znaleźć okres  $T$  obiegu elipsy dla ciała o masie  $m$ , którego całkowita energia wynosi  $E$ , poruszającego się w polu o potencjale  $\varphi(\vec{r}) = -GM/r$ . Następnie proszę udowodnić III prawo Keplera.

*Krzysztof Malarz, Kraków, 23 maja 2002*