

Zadania z fizyki — Zestaw 9

Mechanika kwantowa

WEAiE — Informatyka, rok I

1. Proszę sprawdzić równania operatorowe:

- $\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - x\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 - 1$
- $\frac{\partial}{\partial x} x^n = nx^{n-1} + x^n \frac{\partial}{\partial x}$

2. Korzystając z przedstawienia Jordana proszę znaleźć operatory:

- energii kinetycznej \hat{T} dla cząstki swobodnej,
- energii potencjalnej \hat{V} dla oscylatora harmonicznego,
- z-owej składowej momentu pędu \hat{L}_z .

3. Wykazać, że $u(x) = \exp(-x^2/2)$ jest funkcją własną operatora $\hat{H} = \partial^2/\partial x^2 - x^2$ i znaleźć wartość własną dla tego operatora odpowiadającą wektorowi $u(x)$. Odpowiednikiem jakiej klasycznej wielkości może być operator \hat{H} ?

4. Korzystając z przedstawienia Jordana zapisać równanie operatorowe: $\hat{T} + \hat{V} = \hat{E}$, gdzie \hat{T} — operator energii kinetycznej, \hat{V} — operator energii potencjalnej, \hat{E} — operator energii całkowitej (po dołożeniu za operatorami funkcji falowej $\Psi(x, t)$ jest to *równanie Schrödingera z czasem*). Następnie zakładając niezależności energii potencjalnej od czasu:

- wyseparować z równania część czasową $\chi(t)$,
- wyprowadzić równanie Schrödingera (bez czasu),
- rozwiązać je dla cząstki swobodnej.

5. Dla jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału operator energii potencjalnej $V(x)$ dany jest formułą:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \iff x \in (0, a), \\ \infty & \iff x \in (-\infty, 0] \cup [a, +\infty). \end{cases}$$

Rozwiązać równanie Schrödingera dla cząstki w studni. Znaleźć dopuszczalne wartości energii cząstki. Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w stanie podstawowym w przedziale $[0, a/4]$?

6. Znaleźć średnią energię kinetyczną w stanie

$$\psi(x) = \begin{cases} A \sin \frac{2\pi x}{a} + B \cos \frac{4\pi x}{a} & \iff x \in [0, a], \\ 0 & \iff x \in (-\infty, 0) \cup (a, +\infty). \end{cases}$$

w układzie jednowymiarowym.

7. Cząstka o energii $0 < E < V_0$ opisana falą płaską $\psi(x) = \exp(ikx)$ nadchodząca z lewej strony zderza się z barierą potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \iff x < 0 \text{ lub } x > a, \\ V_0 & \iff 0 < x < a. \end{cases}$$

Znaleźć współczynnik rozproszenia R i transmisji T przez barierę. Proszę sprawdzić, że suma tych współczynników wynosi jeden ($R + T = 1$).

8. Nieunormowana funkcja falowa cząstki swobodnej poruszającej się po linii prostej dana jest formułą:

$$\psi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta} + \frac{ipx}{\hbar}\right),$$

gdzie p i Δ są stałe. Znaleźć średnią wartość położenia $\langle x \rangle$ i pędu $\langle p \rangle$ cząstki w tym stanie.

9. Wyprowadzić wzór na comptonowską zmianę długości fali.

Krzysztof Malarz, Kraków, 23 maja 2002