KSN — III FK — zadanie 7.3
Równania różniczkowe zwyczajne

Zajmujemy się ruchem planety w polu grawitacyjnym nieruchomej znajdującej się w początku układu współrzędnych gwiazdy.

Położenie planety w chwili czasowej t_i niech określa wektor

$$\vec{r}(t_i) = (x_1(t_i), x_2(t_2)) \tag{1}$$

prędkość możemy zapisać jako:

$$\vec{v}(t_i) = (v_1(t_i), v_2(t_i)) = (\dot{x}(t_i), \dot{x}_2(t_i)). \tag{2}$$

Siła działająca na planetę po rozpisaniu na składowe

$$m\ddot{x}_j(t_i) = -\frac{GMmx_j(t_i)}{(x_1^2(t_i) + x_2^2(t_i))^{3/2}} \tag{3}$$

gdzie $j = 1, 2$, m — masa planety (która się upraszcza), G — stała grawitacyjna a M to masa gwiazdy. Przyjmując za jednostkę długości $GM^{3/2}$ otrzymujemy:

$$\ddot{x}_j(t_i) = -\frac{x_j(t_i)}{(x_1^2(t_i) + x_2^2(t_i))^{3/2}} \tag{4}$$

Jest to (dla $j = 1, 2$) układ dwóch równań (na x_1 i x_2) różniczkowych drugiego rzędu który możemy przekształcić na układ 4 równań pierwszego rzędu (na x_1 x_2, v_1, v_2). Oznaczając $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, v_1, x_2, v_2)$ otrzymamy

$$\dot{y}_j(t_i) = f_j(t_i, y_1, y_2, y_3, y_4). \tag{5}$$

(tym razem dla $j = 1, 2, 3, 4$), gdzie przepis na każdą z funkcji f_j pojawił się właściwie w poprzednich równaniach (2) lub (4).

Zadanie polega na rozwiązaniu układu (5) i wyznaczaniu $y_j(t_i)$ dla kolejnych chwil czasowych t_i. Przyjąć początkowo $h = 0.01$ i tak dobrać wartości początkowe $(x_1(t_0 = 0), x_2(t_0), v_1(t_0), v_2(t_0))$ by przy pomocy procedury RK4 uzyskać zamkniętą trajektorię (elipsę) (należy przy tym wykonać odpowiednią ilość kroków).

Proszę wyznaczyć trajektorię planety $(x_2(x_1))$ oraz zależność całkowitej energii układu $E = E_p + E_k$ w funkcji czasu.

Tomasz Sitkowski, Kraków, 12 grudnia 2002