KSN — III FK — zadanie 1.1
Rozwiązywanie UARL metodami bezpośrednimi (1)

Jednym ze źródeł UARL mogą być równania różniczkowe. Dla prostego oscylatora harmonicznego z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t). \tag{1}$$

Przybliżając występującą po lewej stronie równania (1) drugą pochodną położenia x w chwili t ilorazem różnicowym:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

i wprowadzając oznaczenia $\Delta t = h$, $x_i = x(ih)$ otrzymujemy z równania (1) iteracyjny przepis pozwalający na wyznaczenie x_{i+1} w zależności od x_i i x_{i-1}:

$$x_{i+1} + (\omega^2h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0. \tag{2}$$

Do jednoznaczego rozwiązania potrzeba jeszcze informacji o wartościach x_0 i x_1. Dają je warunki początkowe: $x_0 = A$ jest początkowym wychyleniem z położenia równowagi, zaś iloraz $(x_1 - x_0)/h = v_0$ informuje o początkowej wartości prędkości ciała.

Równanie (2) wraz z warunkami początkowymi daje się zapisać w postaci macierzowej dla pierwszych siedmiu kroków czasowych jako:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Proszę rozwiązać układ (3) metodą Gaussa-Jordana. Narysować zależność wychylenia z położenia równowagi dla tego układu na przestrzeni kilku okresów drgań. Przyjąć $k/m = 1$, warunki początkowe $v_0 = 0$, $A = 1$ oraz krok całkowania $h = 0.1$.

Krzysztof Malarz, Kraków, 18 października 2004