KSN — III FK — zadanie 2.1

Rozwiązywanie UARL metodami bezpośrednimi (2)

Wyobraźmy sobie, że mamy dane N punktów (x_i, y_i) dla $i = 1, \ldots, N$, przez które należy poprowadzić wielomian interpolacyjny $w(x)$ tj. wielomian stopnia $N-1$ o tej własności, że $w(x_i) = y_i$.

Do rozwiązania tego problemu można podejść na kilka sposobów. Można się np. pokusić o znalezienie współczynników c_i wielomianu interpolacyjnego

$$w(x) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i x^i.$$

Współczynniki te dane są układem N liniowych równań algebraicznych o N niewiadomych,

$$\begin{cases} c_0 & +c_1x_1 & +c_2x_1^2 & +\ldots & +c_{N-2}x_1^{N-2} + & c_{N-1}x_1^{N-1} & = y_1 \\ c_0 & +c_1x_2 & +c_2x_2^2 & +\ldots & +c_{N-2}x_2^{N-2} + & c_{N-1}x_2^{N-1} & = y_2 \\ & & & \vdots & & & \\ c_0 & +c_1x_N & +c_2x_N^2 & +\ldots & +c_{N-2}x_N^{N-2} + & c_{N-1}x_N^{N-1} & = y_N \end{cases},$$

który można przedstawić w postaci macierzowej $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jako:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{N-2} & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{N-2} & x_2^{N-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \ldots & x_N^{N-2} & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Macierz $\mathbf{A}$ o powyższej postaci nazywana jest macierzą *Vandermonde'a*.

Układ równań (1) proszę rozwiązać poprzez rozkład LU.

Na wspólnym wykresie proszę nanieść zarówno węzły interpolacyjne i jak i wartości wielomianu na przedziale $[x_1; x_N]$. Wartości wielomianu proszę wyznaczać schematem *Hornera*

$$w(x) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i x^i = \Big(\ldots \big((c_{N-1}x + c_{N-2})x + c_{N-3} \big)x + \ldots + c_1 \Big)x + c_0$$

co dla wielomianu wyższego rzędu można zgrabnie implementować jako

```
w=c(N-1)
DO i=N-2,0,-1
w=w*x+c(i)
ENDDO
```

Krzysztof Malarz, Kraków, 29 października 2003