

KSN — III FK — zadanie 6.3

Iteracyjne rozwiązywanie układów równań liniowych

Jednym ze źródeł dużych układów równań algebraicznych są równania różniczkowe cząstkowe. Np. równania Poissona dla potencjału pola elektrostatycznego u wytworzonego przez ładunek rozłożony z gęstością ρ :

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

tj.:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = -\rho(x, y)/\varepsilon_0$$

po przestrzennej dyskretyzacji prowadzi do równania

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = -\rho_{i,j}/\varepsilon_0$$

i następnie

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = -h^2 \rho_{i,j}/\varepsilon_0, \quad (1)$$

w którym $u_{i,j}$ oznacza wartość funkcji $u(x_i, y_j)$ w punkcie o współrzędnych $x_i = x_0 + ih$, $y_j = y_0 + jh$ ($i, j = 0, \dots, N$). Równanie to można zapisać w postaci macierzowej $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Do jednoznacznego rozwiązania potrzeba wyspecyfikować wartości funkcji u (bądź jej pochodnej) na brzegach rozpatrywanego obszaru tj. dla $x = x_0$, $x = x_N$, $y = y_0$ i $y = y_N$.

Proszę spróbować znaleźć metodą kolejnych nadrelaksacji rozkład pola elektrostatycznego wytworzonego przez dipol elektryczny umieszczony centralnie wewnątrz uziemionego na brzegach kwadratu o boku $L = 10$ przy $q = \pm 1$ i $a = 4$. Przyjąć $N = 100$.

Naszkieować otrzymany rozkład potencjału.

Krzysztof Malarz, Kraków, 30 listopada 2004