Metody Lagrange'a i Hamiltona w Mechanice

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 5

Lagrangian i zasada Hamiltona

- Podobieństwo r. Lagrange'a opisujących ruch układu mechanicznego do r. E-L w problemie wariacyjnym, sugeruje, że istnieje funkcjonał (nazywany działaniem):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\, dt \qquad q \overset{ozn}{\equiv} (q_1, q_2, ..., q_n)$$

który poddany zasadzie wariacyjnej prowadzi do r. Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, ..., n$$

- Zasada Hamiltona (zasada najmniejszego działania): Spośród wszystkich możliwych dróg, wzdłuż których układ dynamiczny może przejść z jednego punktu w przestrzeni konfiguracyjnej do innego, w zadanym przedziale czasu, realizowana jest ta droga, która odpowiada wartości stacjonarnej działania.

- Lagranżjany różniące się pochodną zupełną dowolnej funkcji współrzędnych uogólnionych i czasu, prowadzą do takich samych równań ruchu ($\delta\bar{S} = 0 = \delta S$):

$$\bar{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

$$\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{L}(q, \dot{q}, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}\, dt = S + f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1)$$

Energia potencjalna zależna od prędkości

- Istnieją układy w których przyłożone siły nie są zachowawcze (tzn. nie istnieje potencjał V), a mimo to równania ruchu moża zapisać w postaci r. Lagrange'a. Jest to możliwe w sytuacji kiedy uogólnione siły daje daje się zapisać w postaci:

$$Q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad j = 1, ..., n$$

gdzie $U(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ jest energią potencjalną zależną od prędkości.

Lagrangian przyjmuje wówczas postać:

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - U(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

Przykład: Lagrangian cząstki naładowanej poruszającej się w statycznym polu elektrycznym i statycznym polu magnetycznym.

Można pokazać, że siłę Lorentza $\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$ daje się wyprowadzić z równań Lagrange'a wprowadzając energię potencjalną zależną od prędkości

$$U = e\phi(\vec{r}) - e\,\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

gdzie ϕ i $\vec{A}$ to petencjały skalarny i wektorowy, z których można skonstruować pola $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ oraz $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Sam Lagrangian cząstki przyjmuje postać:

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - e\phi(\vec{r}) + e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

Funkcja energii h

- Rozważamy układ opisany za pomocą lagranżjanu $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ Pomnóżmy j-te równanie Lagrange'a obustronnie przez $\dot{q}_j$ i wysumujmy po indeksie j:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - L \right] + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

gdzie $h = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - L$ nazywamy funkcją energii układu.

- Interpretacja funkcji energii h:
  - $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ oraz $\partial L / \partial t \neq 0$; h nie jest zachowane oraz $h \neq T + V$

Przykład: Wahadło matematyczne z drgającym punktem zawieszenia $Z(t)$.

$$L = \frac{1}{2} m (a^2 \dot{\theta}^2 + \dot{Z}^2 - 2a\dot{\theta}\dot{Z} \sin\theta) + mg(Z + a\cos\theta)$$

$$h = \dot{\theta} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - L = \frac{1}{2} m (a^2 \dot{\theta}^2 - \dot{Z}^2) - mg(Z + a\cos\theta) \neq T + V \neq \text{const}$$

Funkcja energii h

- Jeśli $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ wtedy $\partial L / \partial t = 0$ skąd wynika, ze h jest stałą.

Przykład: Cząstka o masie m i ładunku e poruszająca się w statycznym polu magnetycznym $\vec{B}(\vec{r})$.

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + e \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

$$\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) = h = \text{const}$$

h jest w tym przypadku energią kinetyczną cząstki, która jest zachowana ponieważ siła magnetyczna nie wykonuje pracy.

- W przypadku standardowego układu zachowawczego $h = T + V = \text{const}$ i mamy do czynienia z klasyczną formą zachowania całkowitej energii E.

- Stałą ruchu nazywamy funkcję $f(q, \dot{q}, t)$, która nie zmienia swojej wartości podczas ewolucji układu.

Przykład: W ruchu oscylatora harmonicznego o częstości kołowej ω, $\ddot{x} = -\omega^2 x$, zachowana jest wielkość: $f(x, \dot{x}, t) = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\omega x}{\dot{x}} \right) - \omega t$.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{1 + \omega^2 x^2 / \dot{x}^2} \frac{\omega}{\dot{x}} \dot{x} + \frac{1}{1 + \omega^2 x^2 / \dot{x}^2} \left[-\frac{\omega x}{\dot{x}^2} \right] \ddot{x} - \omega = 0$$

Pędy uogólnione

- Pędy uogólnione dla układu holonomicznego opisanego za pomocą lagranżjanu $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$, odpowiadające współrzędnym uogólnionym q_j definiujemy jako:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Przykład: Pędy uogólnione dla problemu bloku zsuwającego się bez tarcia po równi pochyłej, która moze się poruszać bez tarcia po poziomej płaszczyźnie.

Lagranżjan: $L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\right) + mgy\sin\alpha$

Pędy uogólnione:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m(\dot{x} + \dot{y}\cos\alpha)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m(\dot{y} + \dot{x}\cos\alpha)$$

Tutaj p_x jest składową poziomą pędu układu, ale p_y nie jest składową pędu.

- Równania Lagrange'a mogą byc zapisane w postaci: $\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$

  W przypadku gdy $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, wtedy uogólniony pęd p_j jest stałą ruchu.

  Współrzędne q_j nazywamy wtedy cyklicznymi.

Symetrie i prawa zachowania - pęd

- Niech S będzie układem zachowawczym z energią potencjalną V. Jeśli przy przesunięciu S (jako całości) równoległym do wektora $\vec{n}$ i zgodnym z więzami, energia potencjalna V nie ulega zmianie, to wówczas w każdym ruchu układu S, składowa pędu liniowego równoległa do wektora $\vec{n}$ jest zachowana.

  Po przesunięciu λ równoległym do wektora $\vec{n}$ zmienia się konfiguracja układu:

$$\vec{r}_i \to \vec{r}_i^{\lambda} = \vec{r}_i + \lambda\vec{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{q} \to \vec{q}^{\lambda} \text{ oraz } \vec{r}_i^{\lambda} = \vec{r}_i(\vec{q}^{\lambda})$$

  Startując z r. Lagrange'a w postaci:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \text{gdzie} \quad T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i, \quad \text{oraz} \quad \dot{\vec{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

  otrzymujemy

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \Big/ \cdot \left[\frac{\partial q_j^{\lambda}}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0} \quad \Big/ \sum_j$$

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\left[\frac{\partial q_j^{\lambda}}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0}\right) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_j}\left[\frac{\partial q_j^{\lambda}}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0}$$

Symetrie i prawa zachowania - pęd

Ponieważ:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \left[\frac{\partial q_j^\lambda}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0} = \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial q_j^\lambda} \vec{r}_i(\vec{q}^\lambda)\right) \frac{\partial q_j^\lambda}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \vec{r}_i(\vec{q}^\lambda)\right]_{\lambda=0} = \left[\frac{\partial \vec{r}_i^\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right]_{\lambda=0} = \vec{n}$$

oraz V nie zmienia się przy przesunięciu, $V(\vec{q}^\lambda) = V(\vec{q})$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_j} \left[\frac{\partial q_j^\lambda}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0} = \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial q_j^\lambda} V(\vec{q}^\lambda)\right) \frac{\partial q_j^\lambda}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} V(\vec{q}^\lambda)\right]_{\lambda=0} = 0$$

W rezultacie otrzymujemy:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) \cdot \vec{n} = const$$

co oznacza, że składowa pędu w kierunku wektora $\vec{n}$ jest zachowana.

Przykład: W ruchu klocka po równi i równi po stole w przypadku braku tarcia nie zmienia się energia potencjalna przy ruchu poziomym, w związku z czym składowa pędu w kierunku poziomym x jest zachowana.

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m(\dot{x} + \dot{y}\cos\alpha)$$

Symetrie i prawa zachowania - moment pędu

- Niech S będzie układem zachowawczym z energią potencjalną V. Jeśli przy obrocie S (jako całości) wokół ustalonej osi $\vec{k}$, zgodnym w istniejącymi więzami, energia potencjalna V nie ulega zmianie, to wówczas w każdym ruchu układu S, składowa momentu pędu wzdłuż osi $\vec{k}$ jest zachowana.

  Niech λ oznacza kąt obrotu układu S wokół osi $\vec{k}$. Postępując podobnie jak w przypadku pędu dostajemy:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \left[\frac{\partial \vec{r}_i^{\,\lambda}}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = 0$$

  Ponieważ mamy: $\dfrac{\partial \vec{r}_i^{\,\lambda}}{\partial t} = \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \vec{k} \times \vec{r}_i^{\,\lambda} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \vec{r}_i^{\,\lambda}}{\partial \lambda} = \vec{k} \times \vec{r}_i^{\,\lambda}$ więc:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot (\vec{k} \times \vec{r}_i) = 0 \quad \overset{\int dt}{\Rightarrow} \quad \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \right) \cdot \vec{k} = const$$

  co oznacza, że składowa momentu pędu wokół osi $\vec{k}$ jest zachowana.

- Uwaga: W przypadku każdego układu S, którego energia potencjalna jest niezmiennicza względem wszystkich translacji i rotacji, zachowane są wszystkie trzy składowe pędu i momentu pędu.

Twierdzenie Noether

- Twierdzenie Noether: Jeśli działanie S dla układu o n stopniach swobody jest niezmiennicze względem transformacji współrzędnych uogólnionych i czasu:

$$t \to t' = t + \epsilon X(q(t), t) \qquad \text{oraz} \qquad q_i(t) \to q_i'(t') = q_i(t) + \epsilon \Psi_i(q(t), t)$$

czyli $$\Delta S = \int_{t_1'}^{t_2'} L\left(q'(t'), \dot{q}'(t'), t'\right) dt' - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \dot{q}(t), t\right) dt = 0$$

to wielkość $C = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}_i X - \Psi_i) - LX$ jest stałą ruchu.

Dowód:

$$\frac{dq_i'(t')}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{dq_i'(t')}{dt} = (1 - \epsilon\dot{X})(\dot{q}_i + \epsilon\dot{\Psi}_i) = \dot{q}_i + \epsilon\xi_i, \qquad \xi_i \equiv \dot{\Psi}_i - \dot{q}_i\dot{X}$$

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \int_{t_1}^{t_2} L(q + \epsilon\Psi, \dot{q} + \epsilon\xi, t + \epsilon X)(1 + \epsilon\dot{X})\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ L + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\epsilon\Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\epsilon\xi_i\right] + \frac{\partial L}{\partial t}\epsilon X \right\}(1 + \epsilon\dot{X})\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \\
&= \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\xi_i\right] + \frac{\partial L}{\partial t}X + L\dot{X} \right\} dt
\end{aligned}$$

Twierdzenie Noether

Aby $\Delta S = 0$ dla dowolnych ϵ i przedziału całkowania, musi zachodzić:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\Psi_i\frac{\partial L}{\partial q_i} + (\dot{\Psi}_i - \dot{q}_i\dot{X})\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] + L\dot{X} + \frac{\partial L}{\partial t}X = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0, \qquad h = \sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\Psi_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \dot{\Psi}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - h\dot{X} - \frac{dh}{dt}X = -\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}_iX - \Psi_i) - LX\right\} = 0$$

- Lagranżjany różniące się pochodną zupełną po czasie dowolnej funkcji $G(q,t)$ prowadzą do tych samych równań ruchu (slajd 6-1). Twierdzenie Noether można uogólnić do stwierdzenia, że zachowana jest wielkość:

$$\overline{C} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}_iX - \Psi_i) - LX + G$$

- Uwaga: Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Noether nie jest prawdziwe, tzn. istnieją stałe ruchu, które nie są stowarzyszone z ciągłymi symetriami działania.

Przykład: (slajd 5-4) - Nie istnieją funkcje $X(x,t)$, $\Psi(x,t)$ i $G(x,t)$ takie, że:

$$\frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + m\omega^2x^2)X(x,t) - m\dot{x}\Psi(x,t) + G(x,t) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\omega x}{\dot{x}}\right) - \omega t$$

Twierdzenie Noether - przykłady

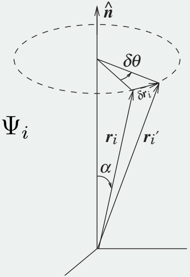
Przykład: Jeśli lagranżjan nie zależy bezpośrednio od czasu, tzn. operacja symetrii ma postać $t \to t' = t + \epsilon X$ - wtedy wielkością zachowaną jest funkcja energii:

$$\Psi_i = 0,\ X = 1 \quad \Rightarrow \quad h = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L = const$$

Przykład: Jeśli lagranżjan układu jako całości jest niezmienniczy przy obrotach względem osi $\hat{n}$, to moment pędu układu względem tej osi jest zachowany.

Jako współrzędne uogólnione wybieramy:

$$\begin{array}{lll} q_1 = x_1, & q_2 = y_1, & q_3 = z_1 \\ \quad\dots & \quad\dots & \quad\dots \\ q_{3N-2} = x_N, & q_{3N-1} = y_N, & q_{3N} = z_N \end{array}$$



Lagranżjan jest niezmienniczy względem transformacji: $q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i$

$$\begin{array}{lll} \Psi_1 = (\hat{n} \times \vec{r}_1)_x, & \Psi_2 = (\hat{n} \times \vec{r}_1)_y, & \Psi_3 = (\hat{n} \times \vec{r}_1)_z \\ \quad\dots & \quad\dots & \quad\dots \\ \Psi_{3N-2} = (\hat{n} \times \vec{r}_N)_x, & \Psi_{3N-2} = (\hat{n} \times \vec{r}_N)_y, & \Psi_{3N} = (\hat{n} \times \vec{r}_N)_z \end{array}$$

Z twierdzenia Noether wynika, że:

$$-\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Psi_k = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i) = const \quad \Rightarrow \quad \hat{n} \cdot \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = const$$

Równania Lagrange'a w postaci Hamiltona

Przykład: Równanie orbity cząstki o masie m poruszającej się w polu grawitacyjnym masy M umieszczonej w początku układu współrzędnych.

Lagranżjan: $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + G\frac{mM}{r}$

Równania ruchu Lagrange'a: $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}$, oraz $2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$

są równaniami różniczkowymi (ODE) drugiego stopnia w zmiennych $\{r(t), \theta(t)\}$.

Wprowadzając zmienne $v_r = \dot{r}$ oraz $v_\theta = \dot{\theta}$ można powyższe rówania zapisać jako układ czterech ODE pierwszego stopnia w zmiennych $\{r, \theta, v_r, v_\theta\}$:

$$\dot{r} = v_r, \qquad \dot{v}_r = rv_\theta^2 - GM/r^2, \qquad \dot{\theta} = v_\theta, \qquad \dot{v}_\theta = -2v_r v_\theta/r$$

Jako nowe zmienne można także wykorzystać pędy uogólnione $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad\qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

Odwracając powyższe równania i korzystając z równań Lagrange'a $\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$ znajdujemy układ czterech ODE pierwszego stopnia w zmiennych $\{r, \theta, p_r, p_\theta\}$:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - G\frac{mM}{r^2}, \qquad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \qquad \dot{p}_\theta = 0$$

Układ ten to tzw. postać Hamiltona równań Lagrange'a.