Metody Lagrange'a i Hamiltona w Mechanice

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 6

Transformacje Legendre'a

Przejście do postaci Hamiltona wymaga odwrócenia równania $p_j = \dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$, tak aby wyrazić $\dot{\vec{q}}$ przez $\vec{q}$, $\vec{p}$ oraz t.

Interesuje nas ogólna metoda takiej transformacji, ale zaczniemy od dwóch funkcji dwóch zmiennych. Niech $v_1(u_1, u_2)$ i $v_2(u_1, u_2)$ będą zdefiniowane przez:

$$v_1 = \frac{\partial F(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \qquad v_2 = \frac{\partial F(u_1, u_2)}{\partial u_2}$$

Chcemy pokazać, że istnieje taka funkcja $G(v_1, v_2)$ że zmienne u_1 i u_2 można zapisać w postaci:

$$u_1 = \frac{\partial G}{\partial v_1}, \qquad u_2 = \frac{\partial G}{\partial v_2}$$

Rozważmy wyrażenie $X = F(u_1, u_2) + G(v_1, v_2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)$ w którym zmienne v_1 i v_2 są wyrażone za pomocą zmiennych u_1 i u_2. Obliczamy pochodną:

$$\frac{\partial X}{\partial u_1} = \frac{\partial F}{\partial u_1} + \left(\frac{\partial G}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} + \frac{\partial G}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \right) - \left(v_1 + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} - v_1 \right) + \left(\frac{\partial G}{\partial v_1} - u_1 \right) \frac{\partial v_1}{\partial u_1} + \left(\frac{\partial G}{\partial v_2} - u_2 \right) \frac{\partial v_2}{\partial u_1} = 0$$

Podobnie znajdujemy, że $\partial X / \partial u_2 = 0$.

Oznacza to, że X jest stałą, którą można włączyć do definicji funkcji G.

A więc funkcja G (tzw. transformata Legendre'a F) zawsze istnieje i ma postać

$$G(v_1, v_2) = (u_1 v_1 + u_2 v_2) - F(u_1, u_2)$$

gdzie u_1 i u_2 należy wyrazić za pomocą v_1 i v_2.

Przykład: Niech $F(u_1, u_2) = 2u_1^2 + 3u_1 u_2 + u_2^2$. Znajdź funkcję $G(v_1, v_2)$.

Mamy $\quad v_1 = \dfrac{\partial F}{\partial u_1} = 4u_1 + 3u_2, \qquad v_2 = \dfrac{\partial F}{\partial u_2} = 3u_1 + 2u_2$

A więc $G = (u_1 v_1 + u_2 v_2) - F(u_1, u_2) = -v_1^2 + 3v_1 v_2 - 2v_2^2$

Wielowymiarowe transformacje Legendre'a:

Niech zmienne $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ będą określone przez zmienne aktywne $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ oraz pasywne $\vec{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)$ za pomocą formuły:

$$\vec{v} = \vec{\nabla}_{\vec{u}} F(\vec{u}, \vec{w}) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_n} \right)$$

Formuła odrotna ma postać: $\quad \vec{u} = \vec{\nabla}_{\vec{v}} G(\vec{v}, \vec{w}) \quad$ gdzie $\quad G(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - F(\vec{u}, \vec{w})$

Pochodne funkcji F i G względem pasywnych zmiennych związane są relacją

$$\vec{\nabla}_{\vec{w}} F(\vec{u}, \vec{w}) = -\vec{\nabla}_{\vec{w}} G(\vec{v}, \vec{w})$$

Równania Hamiltona

Niech S będzie układem o n stopniach swobody opisanym lagranżjanem $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$. Równania Lagrange'a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, ..., n$$

to ODE drugiego stopnia, które chcemy przekształcić do postaci Hamiltona, tzn. równoważnego układu $2n$ ODE pierwszego stopnia w zmiennych $\vec{q}(t), \vec{p}(t)$ gdzie:

$$\vec{p} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, ..., \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) = \vec{\nabla}_{\dot{\vec{q}}}\, L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

Najpierw chcemy wyeliminować $\dot{\vec{q}}$ z równań Lagrange'a na rzecz $\vec{p}$. W tym celu musimy odwrócić powyższe równanie. Stosując transformacje Legendre'a mamy:

$$\dot{\vec{q}} = \vec{\nabla}_{\vec{p}}\, H(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

Funkcją Hamiltona $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ układu S nazywamy transformatę Legendre'a funkcji Lagrange'a $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$.

Ponieważ funkcje H i L są związane transformatą Legendre'a, więc

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \dot{\vec{q}} \cdot \vec{p} - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{q}} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = -\vec{\nabla}_{\vec{q}} H(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

Równania Hamiltona

Równania Lagrange'a mogą być zapisane w postaci $\dot{\vec{p}} = \vec{\nabla}_{\vec{q}} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$. Eliminując $\dot{\vec{q}}$ z tych równań otrzymujemy równania Lagrange'a w postaci Hamiltona:

$$\dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla}_{\vec{q}} H(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

Równania Hamiltona

Układ n równań Lagrange'a jest równoważny układowi $2n$ ODE pierwszego rzędu w postaci:

$$\dot{\vec{q}} = \vec{\nabla}_{\vec{p}} H(\vec{q}, \vec{p}, t) \qquad \dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla}_{\vec{q}} H(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

zwanych równaniami Hamiltona. Funkcja Hamiltona $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ jest transformacją Legendre'a lagranżjanu $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$.

W rozwiniętej formie równania Hamiltona przyjmują postać:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \qquad j = 1, ..., n$$

Uwaga: Jeśli lagranżjan zależy bezpośrednio od czasu wtedy również w funkcji Hamiltona występuje bezpośrednia zależność od czasu i mamy $\dfrac{\partial L}{\partial t} = -\dfrac{\partial H}{\partial t}$

Równania Hamiltona

Równania Hamiltona dla wahadła mtematycznego.

Lagranżjan: $L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta$

Uogólniony pęd sprzężony ze współrzędną θ dany jest przez:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2}$$

znajdujemy funkcję Hamiltona:

$$H = \dot{\theta}p_\theta - L = \left(\frac{p_\theta}{ma^2}\right)p_\theta - \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta = \frac{p_\theta}{2ma^2} - mga\cos\theta$$

Natomiast równania Hamiltona dla wahadła matematycznego mają postać:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mga\sin\theta$$

Uwaga: Różniczkując po czasie pierwsze równanie i wstawiając za $\dot{p}_\theta$ z drugiego otrzymujemy równanie Lagrange'a: $\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0$.

Własności Hamiltonianu $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$

Funkcja Hamiltona jest identyczna (co do wartości) z funkcją energii:

$$h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j p_j - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

W szczególności jeśli hamiltonian nie zależy bezpośrednio od czasu, to H jest stałą ruchu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_j} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = 0$$

Jeśli S jest standardowym układem zchowawczym, to hamiltonian H jest całkowitą energią układu w zmiennych $\vec{q}$ i $\vec{p}$:

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = T(\vec{q}, \vec{p}) + V(\vec{q})$$

Zachowanie uogólnionego pędu: Jeśli współrzędna uogólniona q_j jest współrzędną cykliczną (tzn. jawnie nie występuje w hamiltonianie), to wtedy uogólniony pęd p_j sprzężony z q_j, jest stałą ruchu:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$$

Równania Hamiltona

Przykład: Równanie orbity cząstki o masie m poruszającej się w polu grawitacyjnym masy M umieszczonej w początku układu współrzędnych.

Jest to układ zachowawczy, więc $H = T + V$ gdzie:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \qquad V = -G\frac{mM}{r}$$

Znajdujemy uogólnione pędy: $\quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$

Równania te łatwo odwrócić: $\quad \dot{r} = \frac{p_r}{m} \qquad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$

Zapisujemy Hamiltonian:

$$H = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - G\frac{mM}{r} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - -G\frac{mM}{r}$$

I znajdujemy równania Hamiltona:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - G\frac{mM}{r^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

Przestrzeń fazowa Hamiltonianu

Ruch układu S opisanego Hamiltonianem $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ można przedstawić graficznie w $2n$ wymiarowej tzw. przestrzeni fazowej.

Przykład: Narysuj trajektorie w przestrzeni fazowej dla układu S opisanego za pomocą lagranżjanu: $L = \dfrac{\dot{q}^2}{4} - \dfrac{q^2}{9}$.

Znajdujemy hamiltonian układu:

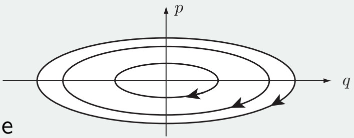
$$H = \dot{q}p - L = (2p)p - \frac{1}{4}(2p)^2 + \frac{q^2}{9} = p^2 + \frac{q^2}{9}$$

oraz równania Hamiltona:

$$\dot{q} = 2p \quad \text{oraz} \quad \dot{p} = -\frac{2}{9}q \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{q} + \frac{4}{9}q = 0$$

Ogólne rozwiązania tych równań Hamiltona mają postać:

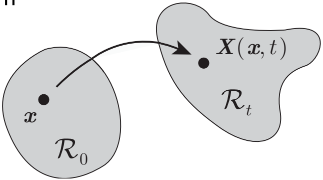
$$\begin{aligned} q &= 3A\cos\left((2t/3) + \alpha\right) \\ p &= -A\sin\left((2t/3) + \alpha\right) \end{aligned}$$



Jest to ruch okresowy, więc trajektorie na diagramie fazowym tworzą zamknięte pętle.

Twierdzenie Liouville'a

- Twierdzenie: W ruchu układu opisanego hamiltonianem zachowana jest objętość w przestrzeni fazowej $(\vec{q}, \vec{p})$.



Dowód:

Oznaczenia: $(\vec{q}, \vec{p}) \overset{\text{ozn}}{\equiv} (x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n})$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \overset{\text{ozn}}{\equiv} F_1, ..., \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \overset{\text{ozn}}{\equiv} F_{2n}$$

Równania Hamiltona $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ przyjmują postać $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, t)$

Ograniczmy się do dwuwymiarowej przestrzeni fazowej. Typowy punkt $\vec{x}$ z obszaru $\mathcal{R}_0$ po czasie t znajdzie się w punkcie $\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t)$ obszaru $\mathcal{R}_t$.

Objetość obszaru $\mathcal{R}_t$ wynosi:

$$v(t) = \int_{\mathcal{R}_t} \mathrm{d}X_1 \, \mathrm{d}X_2 = \int_{\mathcal{R}_0} |J| \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \quad \text{gdzie} \quad J = \begin{vmatrix} \partial X_1/\partial x_1 & \partial X_1/\partial x_2 \\ \partial X_2/\partial x_1 & \partial X_2/\partial x_2 \end{vmatrix}$$

Dla małych t mamy:

$$\vec{X}(\vec{x}, t) = \vec{X}(\vec{x}, 0) + t \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}(\vec{x}, 0) + \mathcal{O}(t^2) = \vec{x} + t \, \vec{F}(\vec{x}, t) + \mathcal{O}(t^2)$$

$$J = 1 + t \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right]_{t=0} + \mathcal{O}(t^2) = 1 + t \, \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}, 0) + \mathcal{O}(t^2)$$

- Objętość obszaru $\mathcal{R}_t$ jest więc dla małych t równa:

$$v(t)=\int\limits_{\mathcal{R}_0}\left(1+t\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{x},0)\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2+\mathcal{O}(t^2)\quad\Rightarrow\quad\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\int\limits_{\mathcal{R}_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{x},0)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

Ponieważ chwila $t=0$ może byc wybrana dowolnie, więc powyższe zachodzi dla dowolnego t:

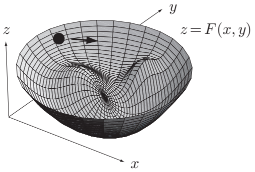
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\int\limits_{\mathcal{R}_t}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{x},0)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

W przypadku gdy spełnione są równania Hamiltona mamy:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right)=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$$

- Twierdzenie Poincare'go o powracaniu:

Niech $\mathcal{S}$ będzie układem autonomicznym, tzn. $H=H(\vec{q},\vec{p})$. Rozważamy ruch punktów w znajdujących się początkowo w obszarze $\mathcal{R}_0$ przestrzeni fazowej.
Jeśli ścieżki w przestrzeni fazowej wszystkich tych punktów leżą przez cały czas w ograniczonym obszarze, to niektóre z tych punktów wrócą w końcu do obszaru $\mathcal{R}_0$.



Nawiasy Poissona

- Niech $F = F(q, p, t)$. Pochodna zupełna po czasie ma postać:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

- Nawiasami Poissona dla wielkości F i G nazywamy

$$\{F, G\}_{q,p} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} \right)$$

- Własności nawiasów Poissona:
  - $\{F, G\} = -\{G, F\}$,
  - $\{F, c\} = 0$, gdzie c jest dowolną stałą,
  - $\{\alpha F_1 + \beta F_2, G\} = \alpha\{F_1, G\} + \beta\{F_2, G\}$,
  - $\{F_1 F_2, G\} = F_1\{F_2, G\} + F_2\{F_1, G\}$,
  - $\frac{\partial}{\partial t}\{F, G\} = \left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\}$,
  - tożsamość Jacobiego: $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$
- Jeśli F jest stałą ruchu to $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0$.

Transformacje kanoniczne

- W szczególności mamy:

$$\{q_j, q_k\} = \{p_j, p_k\} = 0, \quad \{q_j, p_k\} = \delta_{jk}, \quad \{q_k, G\} = \frac{\partial G}{\partial p_k}, \quad \{p_k, G\} = -\frac{\partial G}{\partial q_k}$$

- Transformacje współrzędnych w przestrzeni konfiguracyjnej (tzw. punktowe, zmiana zmiennych): $Q_k = Q_k(q_1, q_2, ..., q_n, t) \quad k = 1, ..., n$
- Transformacje kontaktowe w przestrzeni fazowej (współrzędne i pędy traktujemy jako niezależne zmienne):

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t)$$

- Transformacje kanoniczne to transformacje sprzężonych kanonicznie współrzędnych q i pędów p w nowy układ zmiennych (Q, P), które są także wzajemnie sprzężone kanonicznie i zachowują strukturę równań Hamiltona dla wszystkich układów dynamicznych.
- Równania ruchu są takie same dla lagranżjanów różniących się pochodną zupełną po czasie dowolnej funkcji współrzędnych i czasu:

$$\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t) - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

- Aby transformacja była odwracalna musi zachodzić $\dfrac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \neq 0.$

Funkcje generujące

- Funkcję F nazywamy funkcją generującą, ponieważ pozwala znaleźć relacje pomiędzy starymi i nowymi zmiennymi:

$$\tilde{L} = L - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad P\dot{Q} - \tilde{H} = p\dot{q} - H - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}q - P\,\mathrm{d}Q - (H - \tilde{H})\mathrm{d}t$$

Ponieważ $\mathrm{d}F(q,Q,t) = \frac{\partial F}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial F}{\partial Q}\mathrm{d}Q + \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$

Hamiltonian w nowych zmiennych:

$$\tilde{H}(Q,P,t) \equiv P\dot{Q} - \tilde{L} = -\frac{\partial F}{\partial Q}\dot{Q} - L + \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial F}{\partial t} = p\dot{q} - L + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$= H(q(Q,P),p(Q,P),t) + \frac{\partial F(q(Q,P),Q,t)}{\partial t}$$

- Uwaga: Dla większej liczby stopni swobody mamy $F = F(q_1,..,q_n,Q_1,...,Q_n)$ i dlatego musimy rozwiązać układ $2n$ równań z $2n$ niewiadomymi Q_k, P_k:

$$p_k = \frac{\partial F}{\partial q_k}, \qquad P_k = -\frac{\partial F}{\partial Q_k}$$

Przykład: Wykorzystanie transformacji kanonicznych do rozwiązania problemu prostego oscylatora harmonicznego.

Hamiltonian układu ma postać: $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{kq^2}{2} = \dfrac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$

Wykorzystamy funkcję generującą postaci $F_1(q, Q) = \dfrac{1}{2} m\omega q^2 \operatorname{ctg} Q$

Otrzymujemy: $p = \dfrac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q, \qquad P = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q} = \dfrac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}$

skąd wyznaczamy: $q = \sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}} \sin Q, \qquad p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q$

W nowych zmiennych (Q, P) Hamiltonian przyjmuje postać $H = \omega P$.

Ponieważ hamiltonian nie zależy od Q, więc $P = E/\omega$ jest stałą ruchu.

Równanie ruchu dla zmienej Q ma postać: $\dot{Q} = \dfrac{\partial H}{\partial P} = \omega \quad \Rightarrow \quad Q = \omega t + \alpha$

Równania ruchu dla zmiennych (q, p) przyjmują postać:

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha), \qquad p = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \alpha)$$

Inne typy funkcji generujących

- Istnieją cztery typy f. gen. $F_1(q,Q,t)$, $F_2(q,P,t)$, $F_3(p,Q,t)$, $F_4(p,P,t)$.
- Przejść pomiędzy zmiennymi wykonuje się za pomocą transformaty Legandre'a.
- Uwaga: Wszystkie cztery typy funkcji generujących, otrzymane w ten sposób prowadzą do tej samej transformacji kanonicznej.
- Przejście $F_1(q,Q,t) \rightarrow F_3(p,Q,t) = F_1(q,Q,t) - qp$

$$\mathrm{d}F_3 = \mathrm{d}F_1 - \mathrm{d}(qp) = -q\mathrm{d}p - P\mathrm{d}Q - (H - \tilde{H})\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}$$

Przykład: Oscylator harmoniczny.

$$F_1(q,Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \operatorname{ctg} Q \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q \quad \Rightarrow \quad q(p,Q) = \frac{p}{m\omega}\operatorname{tg} Q$$

Stąd otrzymujemy:

$$F_3(p,Q,t) = F_1(q,Q,t) - qp = \frac{1}{2}m\omega\left(\frac{p}{\omega}\operatorname{tg} Q\right)^2 \operatorname{ctg} Q - \frac{p^2}{m\omega}\operatorname{tg} Q = -\frac{p^2}{2m\omega}\operatorname{tg} Q$$

oraz $\quad P = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q} = \dfrac{p^2}{2m\omega}\dfrac{1}{\cos^2 Q} = \dfrac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}$

Pozostałe typy funkcji generujących

- Pozostałe funkcje generujące:

$$F_4(p,P,t) = F_3(p,Q,t) + PQ \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}$$

$$F_2(q,P,t) = F_1(q,Q,t) + QP \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$$

- W przypadku liczby stopni swobody $n > 1$, możliwe są "hybrydowe" typy funkcji generujących, np. $G(q_1, Q_1, q_2, P_2, t)$.
- Wykorzystanie nawiasów Poissona:

$$\{F,G\}_{q,p} \equiv \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k} \right) \qquad \{F,G\}_{q,p} \equiv \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q}$$

Twierdzenie: Nawiasy Poissona są niezmiennicze względem transformacji kanonicznych, tzn.

$$\{\tilde{F}, \tilde{G}\}_{Q,P} = \{F,G\}_{q,p}$$

W szczególności: $\{Q_i, P_k\}_{q,p} = \delta_{ik}, \ \ \{Q_i, Q_k\}_{q,p} = \{P_i, P_k\}_{q,p} = 0$

Pozwala to stwierdzić bez znajomości funkcji generującej dla transformacji $(q,p) \to (Q,P)$, czy dana transformacja jest kanoniczna czy nie.

Dowód: (ograniczamy się do transformacji niezależnych od czasu)

$$\dot{P}_i = \sum_j \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\dot{p}_j \right) = \sum_j \left(\frac{\partial P}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) =$$

$$= \sum_{j,k} \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial P_k}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \frac{\partial H}{\partial P_k} + \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_k}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \right) \frac{\partial H}{\partial Q_k} \right] =$$

$$= \sum_k \frac{\partial H}{\partial P_k}\{P_i, P_k\}_{q,p} + \sum_k \frac{\partial H}{\partial Q_k}\{P_i, Q_k\}_{q,p} \qquad \left(= -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \right)$$

Wniosek: $\{Q_i, P_k\}_{q,p} = \delta_{ik}$ oraz $\{P_i, P_k\}_{q,p} = 0$ (podobnie $\{Q_i, Q_k\}_{q,p} = 0$)

$$\{F, G\}_{Q,P} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial Q_i}\frac{\partial G}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i}\frac{\partial G}{\partial Q_i} \right) =$$

$$= \sum_{i,j,k} \left[\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial q_k} \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\frac{\partial q_k}{\partial P_i} - \frac{\partial q_j}{\partial P_i}\frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_k} \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\frac{\partial p_k}{\partial P_i} - \frac{\partial q_j}{\partial P_i}\frac{\partial p_k}{\partial Q_i} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_k} \left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\frac{\partial q_k}{\partial P_i} - \frac{\partial p_j}{\partial P_i}\frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\frac{\partial p_k}{\partial P_i} - \frac{\partial p_j}{\partial P_i}\frac{\partial p_k}{\partial Q_i} \right) \right] =$$

$$= \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j} \right) = \{F, G\}_{q,p}$$

Transformacje kanoniczne - przykłady

Przykład: Nawiasy Poissona - przykład z oscylatorem harmonicznym (slajd 6-15)

$$\frac{\partial q}{\partial Q} = \sqrt{\frac{P}{m\omega}}\cos Q \qquad \frac{\partial p}{\partial P} = \sqrt{\frac{m\omega}{P}}\cos Q$$

$$\frac{\partial q}{\partial P} = \sqrt{\frac{m}{\omega P}}\sin Q \qquad \frac{\partial p}{\partial Q} = -\sqrt{\frac{\omega P}{m}}\cos Q$$

$$\{q,p\}_{Q,P} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = 1$$

A więc przejście od zmiennych q, P do Q, P jest transformacją kanoniczną.

Przykład: Określ dla jakich wartości parametrów α i β, transformacje $Q = \dfrac{\alpha p}{q}$ oraz $P = \beta q^2$ są kanoniczne?

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -\frac{\alpha p}{q^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\alpha}{q}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = 2\beta q$$

$$\{Q,P\}_{q,p} = -2\alpha\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = -\frac{1}{2\alpha}$$

A więc podane transformacje są kanoniczne jeśli stałe spełniają ten warunek.