

# Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 1

# Matematyczne Metody Fizyki I

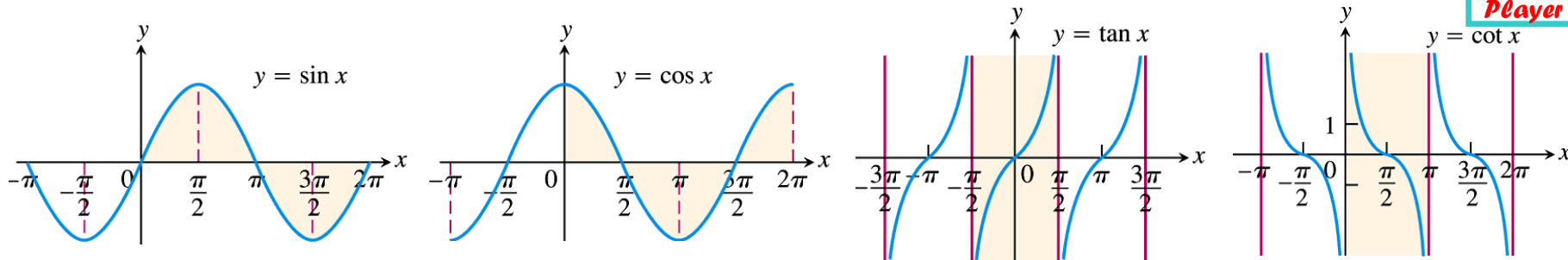
Dr hab. inż. Mariusz Przybycień

- *Matematyka dla przyrodników i inżynierów*, D.A. McQuarrie, PWN, Warszawa 2005.
- *Wybrane rozdziały matematycznych metod fizyki*, A. Lenda, B. Spisak, Wydawnictwo AGH, Kraków 2006.
- *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, F.W. Byron, R.W. Fuller, PWN, Warszawa 1974.
- *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, K.F. Riley, M.P. Hobson, S.J. Bence, Cambridge Univ. Press, 2006.
- *Algebra liniowa*, T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, GiS, Wrocław 2002.
- *Matematyka dla studiów inżynierskich*, S. Białas, A. Ćmiel, A. Fitzke, Wydawnictwo AGH, Kraków 1973.
- *Algebra i geometria analityczna w zadaniach*, H. Arodź, K. Rościszewski, ZNAK, Kraków 2005.
- *Zbiór zadań z algebry*, L. Jeśmianowicz, J. Łoś, PWN, Warszawa 1975.
- *Algebra i wielowymiarowa geometria analityczna w zadaniach*, S. Przybyło, A. Szlachetowski, WNT, Warszawa 2005.
- <http://home.agh.edu.pl/~mariuszp>

# Wiadomości wstępne

## Funkcje trygonometryczne:

Math  
Player



### ➤ wybrane wartości funkcji trygonometrycznych:

$\theta$ (stopnie)	-180	-135	-90	-45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
$\theta$ (radiany)	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin \theta$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan \theta$	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0

Math  
Player

### ➤ tożsamości trygonometryczne dla pojedynczego kąta:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

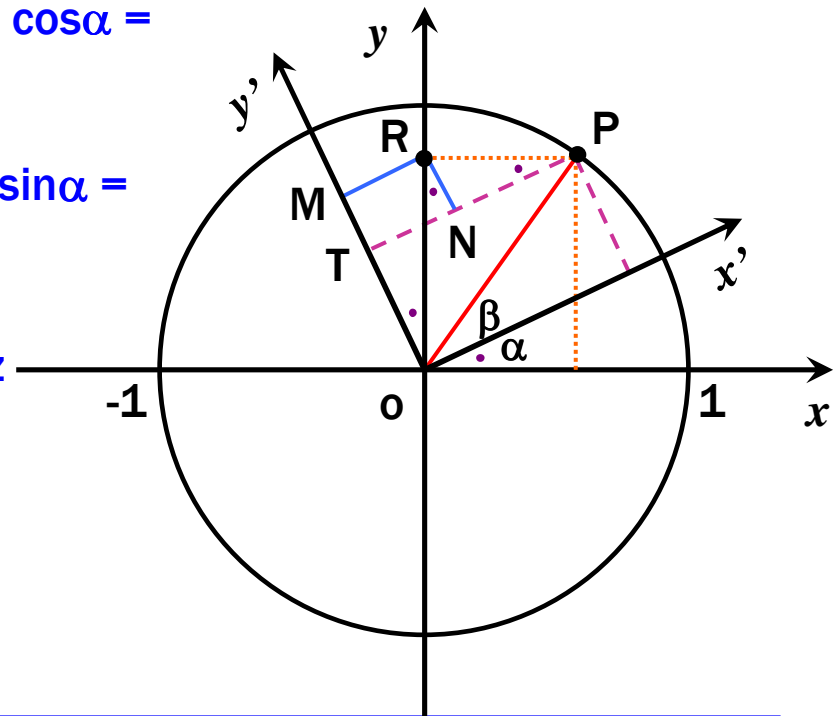
$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

# Tożsamości trygonometryczne

## Tożsamości trygonometryczne dla dwóch kątów:

- Wyprowadzenie wzorów na sinus i cosinus sumy kątów:
  - współrzędne punktu P: w Oxy:  $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$  oraz w Ox'y':  $(\cos\beta, \sin\beta)$
  - współrzędne punktu R: w Oxy:  $(0, \sin(\alpha+\beta))$
  - $\cos \beta = x' = TN + NP = MR + NP = OR \sin \alpha + RP \cos \alpha =$   
 $= \sin(\alpha+\beta) \sin \alpha + \cos(\alpha+\beta) \cos \alpha$
  - $\sin \beta = y' = OM - TM = OM - NR = OR \cos \alpha + RP \sin \alpha =$   
 $= \sin(\alpha+\beta) \cos \alpha - \cos(\alpha+\beta) \sin \alpha$
  - mnożąc pierwsze z powyższych równań przez  $\sin \alpha$  a drugie przez  $\cos \alpha$  otrzymujemy:  
 $\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
  - podobnie znajdujemy:  
 $\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$



# Tożsamości trygonometryczne

Podstawiając  $-\beta$  zamiast  $\beta$  w powyższych wzorach, znajdujemy wyrażenia na sinus i cosinus różnicy kątów. W rezultacie mamy:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

Ważne przypadki szczególne:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Dodając stronami wzory na  $\sin(\alpha \pm \beta)$  a następnie stosując podstawienia  $\alpha + \beta = \gamma$  oraz  $\alpha - \beta = \delta$  znajdujemy wyrażenie na  $\sin \gamma + \sin \delta$ . Postępując analogicznie można znaleźć pozostałe z poniższych wzorów:

$$\sin \gamma + \sin \delta = 2 \sin \left( \frac{\gamma + \delta}{2} \right) \cos \left( \frac{\gamma - \delta}{2} \right)$$

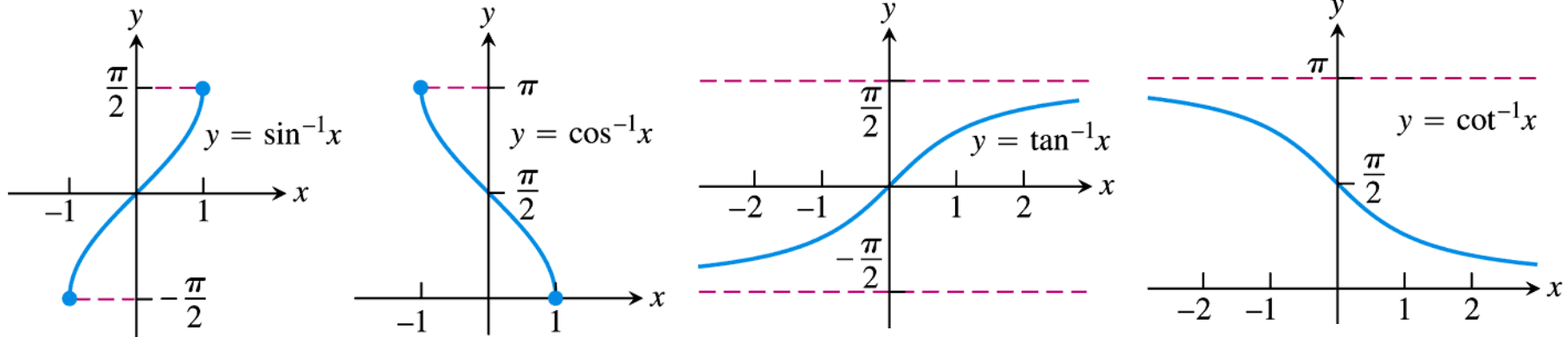
$$\cos \gamma + \cos \delta = 2 \cos \left( \frac{\gamma + \delta}{2} \right) \cos \left( \frac{\gamma - \delta}{2} \right)$$

$$\sin \gamma - \sin \delta = 2 \cos \left( \frac{\gamma + \delta}{2} \right) \sin \left( \frac{\gamma - \delta}{2} \right)$$

$$\cos \gamma - \cos \delta = -2 \sin \left( \frac{\gamma + \delta}{2} \right) \sin \left( \frac{\gamma - \delta}{2} \right)$$

# Funkcje hiperboliczne

Odwrotne funkcje trygonometryczne (funkcje arcus):



Definicja: Funkcje hiperboliczne zdefiniowane są w następujący sposób:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Własności:

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$$

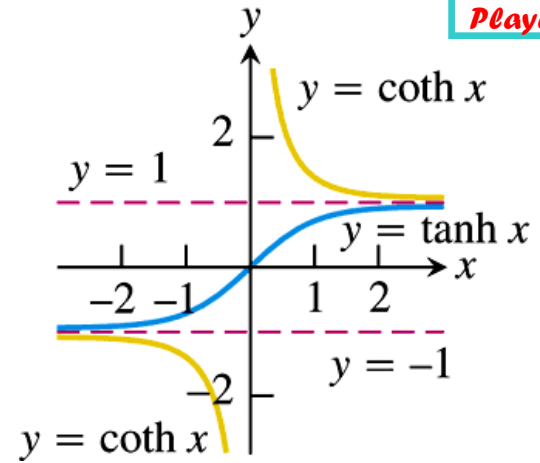
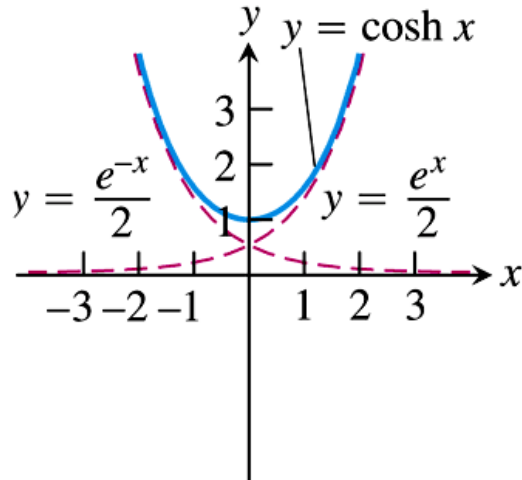
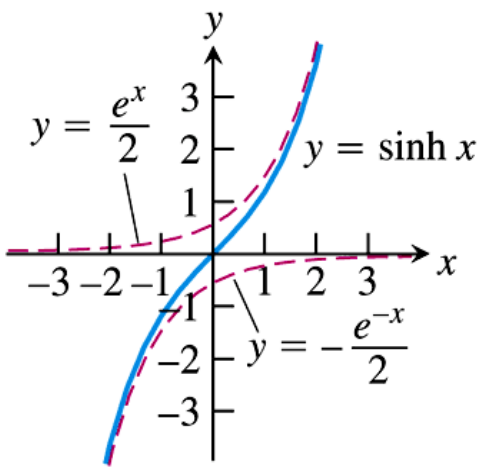
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\left. \begin{aligned} \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\ \cosh(\alpha \pm \beta) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

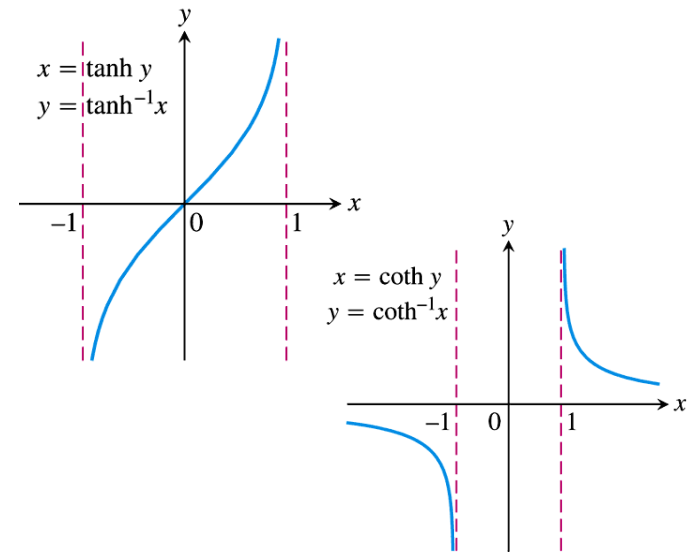
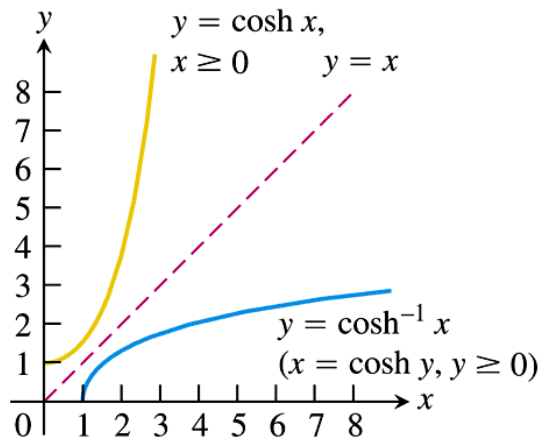
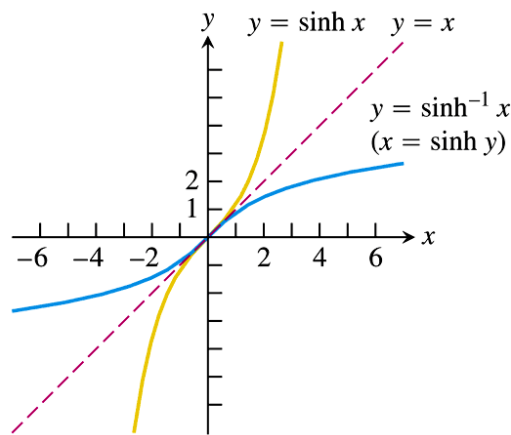
# Wykresy funkcji hiperbolicznych

## Funkcje hiperboliczne:

Math  
Player



## Odwrotne funkcje hiperboliczne (funkcje arcus):



# Symbole sumy ( $\Sigma$ ) i iloczynu ( $\Pi$ )

- sumę oraz iloczyn wyrazów ciągu liczb  $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{n-1}, a_n$ , gdzie  $p < n$  zapisujemy w sposób skrótowy w następujący sposób:

$$\sum_{i=p}^n a_i = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n \qquad \prod_{i=p}^n a_i = a_p \cdot a_{p+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

Przykład: Suma wyrazów ciągu arytmetycznego  $a_0, a_0+d, a_0+2d, \dots, a_0+nd$  dana jest wzorem:

$$\sum_{k=0}^n (a_0 + kd) = \frac{1}{2}(n+1)(2a_0 + nd)$$

Przykład: Suma wyrazów ciągu geometrycznego  $a_0, a_0q, a_0q^2, \dots, a_0q^n$ , gdzie  $q \neq 1$ , dana jest wzorem:

$$\sum_{k=0}^n a_0q^k = a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

- sumy mogą przebiegać po dowolnej liczbie wskaźników, np:

$$\sum_{i=p}^n \sum_{j=r}^m a_{ij} = a_{pr} + a_{p+1r} + \dots + a_{nr} + a_{pr+1} + \dots + a_{nr+1} + \dots + a_{pm} + \dots + a_{nm} = \sum_{j=r}^m \sum_{i=p}^n a_{ij}$$

- jeżeli zakres zmienności indeksów jest taki sam stosuje się zapis:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}$$



# Metody dowodzenia twierdzeń

**Zasada indukcji matematycznej:** Jeżeli twierdzenie w którym jest mowa o liczbach naturalnych (1) jest prawdziwe dla określonej liczby naturalnej  $n_0$ , i (2) jeśli z prawdziwości tego twierdzenia dla liczby naturalnej  $n$  wynika jego prawdziwość dla liczby następnej  $n+1$ , to twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej  $n \geq n_0$ .

Matk  
Player

**Przykład:** Pokaż, że  $Q(n) = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n$  jest podzielne przez 6 dla wszystkich  $n > 0$ .

(1) sprawdzamy prawdziwość twierdzenia dla  $n_0=1$ :  $Q(1)/6 = 6/6 = 1$

$$\begin{aligned} (2) \quad Q(n+1) &= (n+1)^4 + 2(n+1)^3 + 2(n+1)^2 + (n+1) = \\ &= (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 2(n^2 + 2n + 1) + (n+1) = \\ &= (n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) + (4n^3 + 12n^2 + 14n + 6) \end{aligned}$$

Musimy teraz sprawdzić czy  $4n^3 + 14n$  jest podzielne przez 6, czyli czy  $R(n) = 2n^3 + 7n$  jest podzielne przez 3, przeprowadzając dodatkowy dowód przez indukcję:

(1) dla  $n_0=1$ :  $R(1)/3 = 9/3 = 3$

$$(2) \quad R(n+1) = 2(n+1)^3 + 7(n+1) = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 7(n+1) = (2n^3 + 7n) + 3(2n^2 + 2n + 3)$$

$R(n)$  jest więc podzielne przez 3, co oznacza, że ostatecznie  $Q(n)$  jest podzielne przez 6.

# Metody dowodzenia twierdzeń

## Dowód przez zaprzeczenie:

- zakładamy prawdziwość hipotezy oraz logicznego zaprzeczenia rezultatu który chcemy udowodnić (tzn. jeśli dowodzimy „jeśli P to Q” to zakładamy prawdziwość „P” i „nie Q”),
- stosując znane twierdzenia i własności dochodzimy do sprzeczności (tzn. konkluzji sprzecznej z naszymi założeniami lub jakiegoś w oczywisty sposób nieprawdziwego twierdzenia, np.  $1 = 0$ )

Przykład: Udowodnić, że  $\sqrt{2}$  nie jest liczbą wymierną.

- założmy, że  $\sqrt{2}$  jest liczbą wymierną, tzn. że daje się zapisać w postaci  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  gdzie a i b nie mają wspólnych dzielników.
- $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = 2b^2$  co oznacza, że  $a^2$  jest liczbą parzystą, a w konsekwencji samo a jest parzyste, ponieważ iloczyn liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.
- a więc można napisać  $a = 2c \Rightarrow 2c^2 = b^2 \Rightarrow b$  jest parzyste.
- oznacza to że a i b oba są parzyste, a więc mają wspólny dzielnik – **sprzeczność!**

Przykład: Tw: Jest nieskończenie wiele liczb pierwszych. (dowód  $q = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$ )

# Dwumian Newtona

Symbol Newtona:

Math  
Player

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{dla } 0 \leq k \leq n \quad \text{oraz} \quad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{dla } k < 0 \vee k > n$$

**Własności:**  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$      $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$      $\sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k} = \binom{n+k}{k+1}$

Przykład: Dowód metodą indukcji matematycznej trzeciej z powyższych własności:

(1) sprawdzamy prawdziwość twierdzenia dla  $n_0=1$ :  $L = \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = P$

(2)  $\sum_{s=0}^n \binom{k+s}{k} = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k} + \binom{k+n}{k} = \binom{n+k}{k+1} + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$

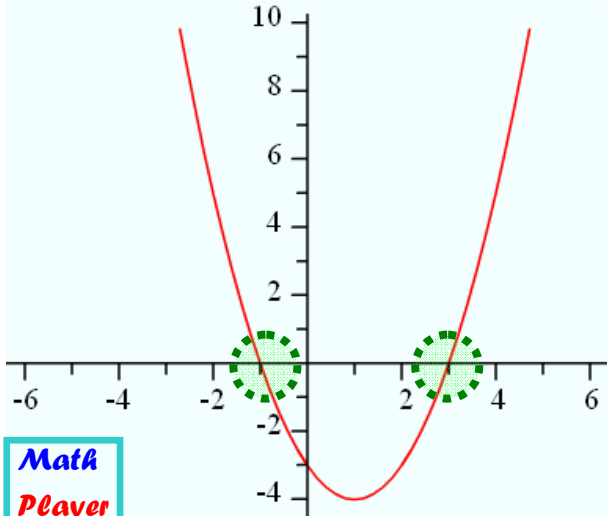
Dwumian Newtona (rozwiniecie dwumianowe):  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Math  
Player

Przykład: Wychodząc z  $(x+y)^p(x+y)^q \equiv (x+y)^{p+q}$  oraz porównując wsp. przy  $x^{p+q-r}y^r$  mamy:

$$\sum_{s=0}^p \binom{p}{s} x^s y^{p-s} \sum_{t=0}^q \binom{q}{t} x^t y^{q-t} \Rightarrow \|s+t=r\| \Rightarrow \sum_{t=0}^r \binom{p}{r-t} \binom{q}{t} = \binom{p+q}{r}$$

# Pierwiastki równania kwadratowego



Math  
Player

Math  
Player

$$ax^2 + bx + c = 0$$

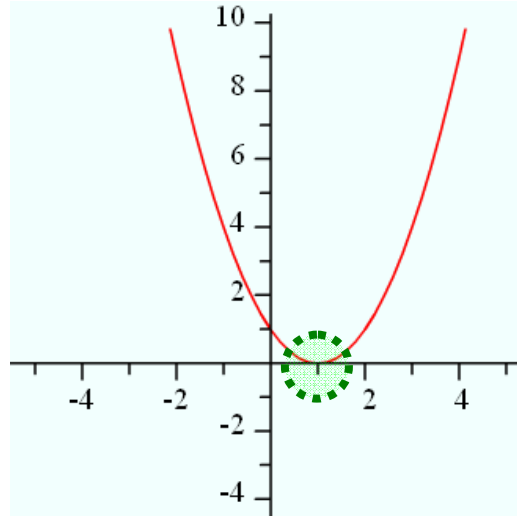
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(4+12)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

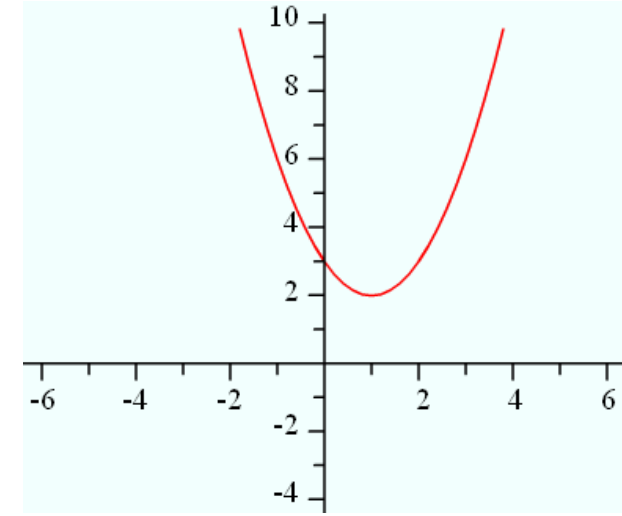


$$y = x^2 - 2x + 1$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(4-4)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$x_{1,2} = 1$$



Math  
Player

$$y = x^2 - 2x + 3$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(4-12)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{-2} = 1 \pm \sqrt{2}\sqrt{-1} \quad ?$$

Jednostka urojona:  $i = \sqrt{-1}$

$$x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

# Liczby zespolone

Liczby zespolone ( $\mathbb{C}$ ) to liczby zawierające jednostkę urojoną  $i$  (L.Euler).

Postać algebraiczna liczb zespolonych to  $z = a+bi$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$a = \text{Re}(z)$  – część rzeczywista liczby  $z$ ,  $b = \text{Im}(z)$  – część urojona liczby  $z$

Jeśli  $b = 0$  oraz  $a \neq 0$ , mamy  $a+0i$  ... lub  $a$ . ... liczba rzeczywista.

Jeśli  $b \neq 0$  oraz  $a = 0$ , mamy  $0+bi$  ... lub  $ib$  ... liczba (czysto) urojona.

Fundamentalne twierdzenie algebry stwierdza, że jeśli  $f(z)$  jest dowolnym wielomianem stopnia  $n$ , to równanie  $f(z) = 0$  ma dokładnie  $n$  rozwiązań (w  $\mathbb{C}$ ).

**Liczby zespolone  $z = a + bi$**

**Liczby urojone  $bi$**

$-4i$        $\pi i$   
 $\pm i$        $i\sqrt{2}$

$-3 + 4i$

$\sqrt{2} + i\sqrt{3}$

$\pi - 24i$

**Liczby rzeczywiste  $a$**   
(wymierne i niewymierne)

$-23 + 0i$        $\sqrt{3}$        $-216.4e$   
 $6.25$        $7/8$

$100 - (2/5)i$

# Własności liczb zespolonych

- Dwie liczby zespolone są sobie równe wtedy i tylko wtedy gdy ich części rzeczywiste i urojone są niezależnie sobie równe:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\{z_1\} = \operatorname{Re}\{z_2\} \text{ i } \operatorname{Im}\{z_1\} = \operatorname{Im}\{z_2\}$$

- W zbiorze liczb zespolonych nie jest określona relacja uporządkowania (tzn., że nie ma sensu wyrażenie np.  ~~$9+6i > 3+2i$~~ )

Liczbą **sprzężoną** do liczby  $z = a + bi$  nazywamy wielkość  $z^* = a - bi$

- Liczba zespolona jest czysto rzeczywista wtedy i tylko wtedy gdy  $z = z^*$
- Liczba zespolona jest czysto urojona wtedy i tylko wtedy gdy  $z = -z^*$
- $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z^* = \frac{1}{2}(z + z^*)$        $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} z^* = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

**Modułem** liczby  $z = a + bi$  nazywamy wielkość:  $|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$

**Uwaga:** zachodzą następujące relacje  $|z| = |z^*|$  oraz  $|z_1| + |z_2| \leq |z_1 + z_2|$

**Przykład:** Znajdź liczbę sprzężoną i moduł liczby zespolonej  $z = a + 2i - 3bi$

$$z = a + (2 - 3b)i \Rightarrow z^* = a - (2 - 3b)i$$

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + (2 - 3b)^2}$$

# Płaszczyzna zespolona i argument

Każdą liczbę zespoloną  $z = a+ib$  można przedstawić jako punkt o współrzędnych kartezjańskich  $(a, b)$  na tzw. **płaszczyźnie zespolonej**:

- wektor wodzący tego punktu ma początek w punkcie  $(0,0)$  i koniec w  $(a,b)$
- jego długość jest równa modułowi liczby zespolonej
- kąt zawarty między osią  $\text{Re}(z)$  i wektorem wodzącym punktu  $(a,b)$  nazywamy **fazą** lub **argumentem** liczby zespolonej i oznaczamy  $\varphi = \arg(z)$ . Liczba  $z = 0$  może mieć dowolną fazę.

W pozostałych przypadkach faza dana jest przez:

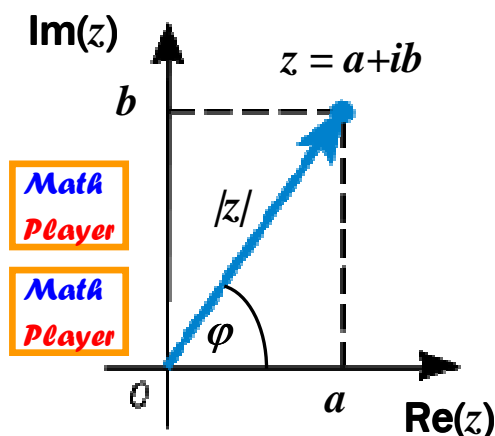
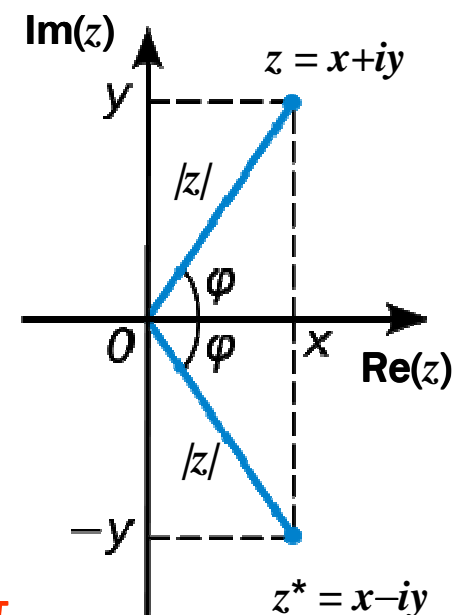


Diagram Arganda

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Danej liczbie zespolonej można przyporządkować nieskończenie wiele faz:  $\varphi + 2k\pi$ , gdzie  $k$  jest dowolną liczbą całkowitą.

**Argumentem głównym** (ozn.  $\text{Arg}(z)$ ) nazywamy fazę z przedziału  $-\pi \leq \varphi < \pi$ .



# Dodawanie liczb zespolonych

- Dodawanie (odejmowanie) liczb zespolonych ( $z_1 = a_1 + ib_1$  oraz  $z_2 = a_2 + ib_2$ ):

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = \\ &= a_1 \pm a_2 + i(b_1 \pm b_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2 \end{cases}$$

Dodawanie l.z. jest przemienne i łączne:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

Sprzężenie zespolone sumy (różnicy) l.z.

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$$

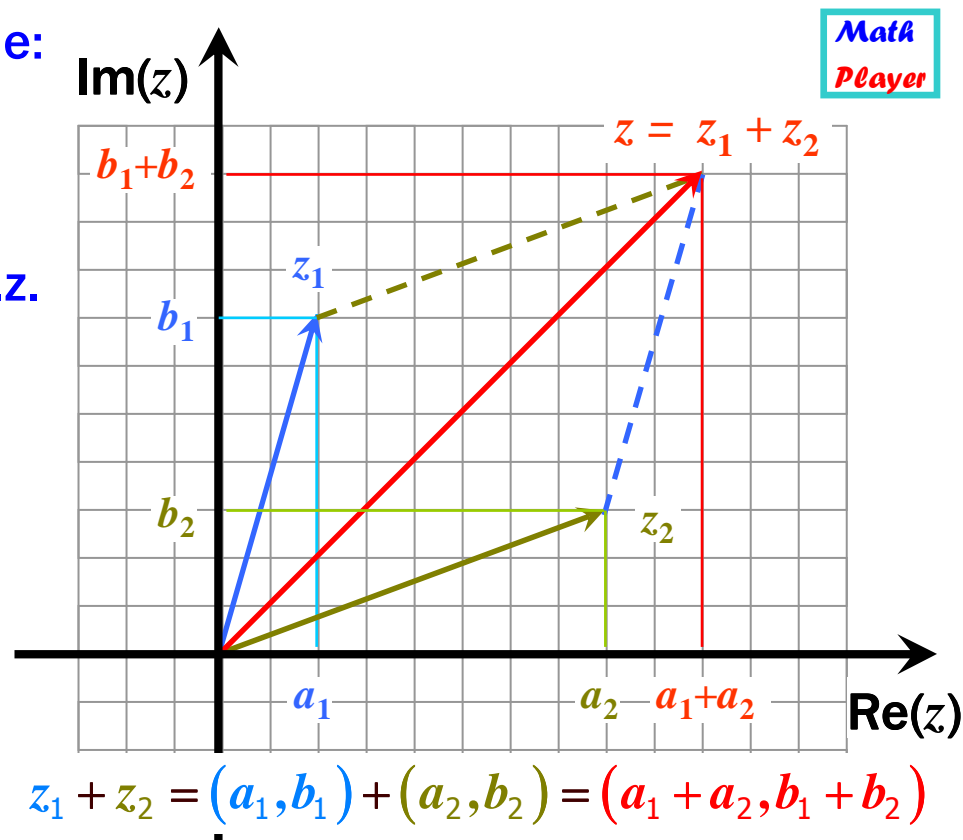
Przykład: Wykonaj działanie  $z_1 + z_2 - z_3$

gdzie  $z_1 = 1 + 2i$ ,  $z_2 = 3 - 4i$ ,  $z_3 = -2 + i$

$$z_1 + z_2 - z_3 =$$

$$= (1 + 2i) + (3 - 4i) - (-2 + i) =$$

$$= (1 + 3 - (-2)) + i(2 - 4 - 1) = 6 - 3i$$





# Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych

- Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych ( $z_1 = a_1 + ib_1$  oraz  $z_2 = a_2 + ib_2$ ):

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) \Rightarrow i^2 = -1 \text{ oraz } z_1 z_2 = z_2 z_1$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 - (ib_2)^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \Rightarrow \forall z \neq 0 \quad z^{-1} \equiv \frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

Przykład: Wykonaj działania  $z_1 z_2$  oraz  $z_1/z_2$  gdzie  $z_1 = 3 + 2i$ ,  $z_2 = -1 - 4i$ .

$$z_1 z_2 = (3 + 2i)(-1 - 4i) = -3 - 2i - 12i - 8i^2 = 5 - 14i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 + 2i)(-1 + 4i)}{(-1 - 4i)(-1 + 4i)} = \frac{-11 + 10i}{17} = -\frac{11}{17} + \frac{10}{17}i$$

Math  
Player

- Własności sprzężenia zespolonego i modułu:

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{pmatrix} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

# Zbiór liczb zespolonych

Przykład: Sprawdź czy w zbiorze liczb zespolonych zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania.

$$\begin{aligned}z(z_1 + z_2) &= (a, b) \left[ (a_1, b_1) + (a_2, b_2) \right] = (a, b) (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = \\ &= \left( a(a_1 + a_2) - b(b_1 + b_2), a(b_1 + b_2) + b(a_1 + a_2) \right) = \\ &= \left( (aa_1 - bb_1) + (aa_2 - bb_2), (ab_1 + ba_1) + (ab_2 + ba_2) \right) = \\ &= (aa_1 - bb_1, ab_1 + ba_1) + (aa_2 - bb_2, ab_2 + ba_2) = \\ &= (a, b) (a_1, b_1) + (a, b) (a_2, b_2) = zz_1 + zz_2\end{aligned}$$

Przykład: Znajdź fazę i moduł liczby zespolonej  $z = 2 - 3i$

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

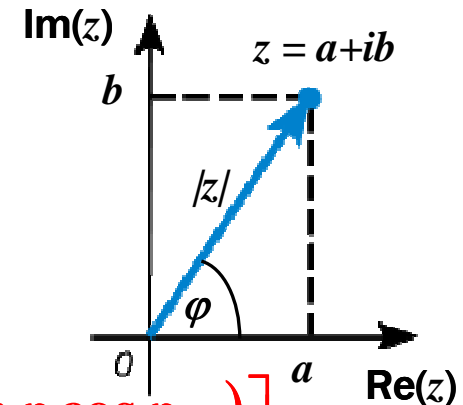
$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{-3}{2}\right) = -0.9828 \text{ rad}$$

Uwaga: przy wyborze kąta zawsze trzeba zwrócić uwagę w której ćwiartce znajduje się badana liczba zespolona.

# Postać trygonometryczna liczb zespolonych

Każdą liczbę zespoloną  $z=a+bi$  można przedstawić w postaci trygonometrycznej:

$$z = a + bi = |z| \left( \frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right) = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$



Mnożenie i dzielenie l.z. w postaci trygonometrycznej:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= |z_1| |z_2| \left[ \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1) \right] = \\ &= |z_1| |z_2| (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Math  
Player

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{|z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2))$$

Wnioski:

➤ można tak dobrać wartości argumentów, aby były spełnione relacje:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad \text{oraz} \quad \arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

➤ Twierdzenie de Moivre'a:  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$

# Zastosowanie twierdzenia de Moivre'a

**Przykład:** Wyraż  $\cos 3\theta$  i  $\sin 3\theta$  poprzez kombinacje potęg  $\cos \theta$  i  $\sin \theta$ .



Stosujemy twierdzenie de Moivre'a:

$$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i (3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta)$$

Porównując, oddzielnie, części rzeczywiste i urojone, dostajemy:

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

**Przykład:** Wyraż  $\cos^4 \theta$  poprzez kombinacje cosinusów wielokrotności kąta.

$$\begin{aligned} z^n + z^{-n} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n + (\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} = \Rightarrow z + z^{-1} = 2 \cos \theta \\ &= \cos n\theta + i \sin n\theta + \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta) = 2 \cos(n\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \frac{1}{2^4} \left( z + \frac{1}{z} \right)^4 = \frac{1}{16} \left( z^4 + 4z^2 + 6 + 4\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} \right) = \\ &= \frac{1}{16} \left( z^4 + \frac{1}{z^4} \right) + \frac{1}{4} \left( z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Podobnie znajdujemy, że:  $z^n - z^{-n} = 2i \sin(n\theta) \Rightarrow z - z^{-1} = 2i \sin \theta$

# Postać biegunowa liczb zespolonych

Z analizy matematycznej wiemy, że:

$$e^x e^y = e^{x+y} \quad e^0 = 1 \quad \frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x} \quad e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

1) ponieważ  $\frac{d}{d\varphi} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = -\sin \varphi + i \cos \varphi = i (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

więc można napisać  $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$

2) inaczej 
$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \dots =$$

$$= \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots \right) + i \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \right) = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Każdą liczbę zespoloną  $z=a+bi$  można przedstawić w postaci biegunowej:

$$z = a + bi = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \exp(i\varphi)$$

Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci biegunowej:

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\varphi_1} |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\varphi_1}}{|z_2| e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

# Pierwiastek z liczby zespolonej

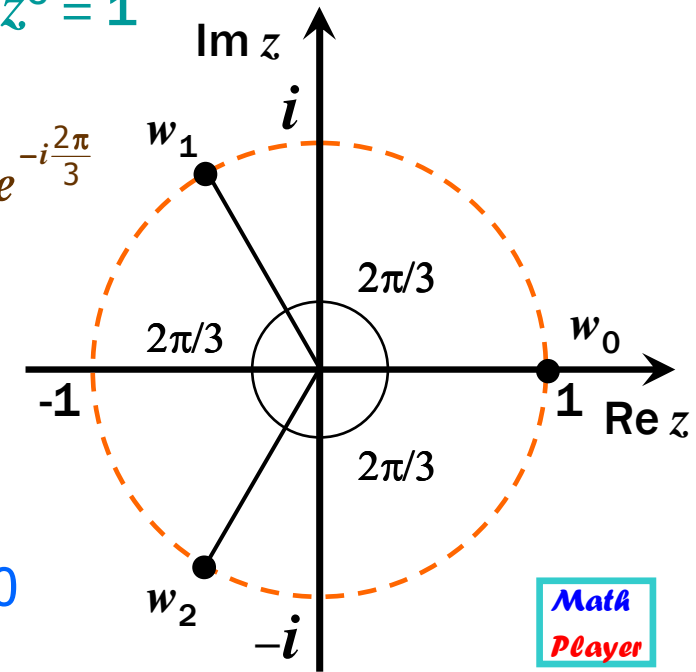
**Twierdzenie:** Istnieje dokładnie  $n$  różnych pierwiastków  $n$ -tego stopnia z każdej liczby zespolonej różnej od zera, tzn. rozwiązań równania  $w^n = z$  i wszystkie te pierwiastki dają się zapisać wzorem, w którym  $k = 0, 1, \dots, n-1$ :

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{|z|} \exp \left( i \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

Math  
Player

**Przykład:** Znajdź wszystkie rozwiązania równania  $z^3 = 1$

$$w_k = \sqrt[3]{1} \exp \left( i \frac{0 + 2k\pi}{3} \right) = \begin{cases} k=0 & k=1 & k=2 \\ w_0 = 1 & w_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} & w_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$



Math  
Player

**Własności pierwiastka  $n$ -tego stopnia z l.z. 1:**

- $\omega_k = \exp \left( i \frac{2k\pi}{n} \right)$  gdzie  $k = 0, 1, \dots, n-1$
- $\omega_k \omega_l = \omega_{k+l}$       $\omega_k = (\omega_1)^k$       $(\omega_1)^n = 1$
- $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_1)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \exp \left( i \frac{2\pi}{n} \right) \right)^k = \frac{e^{i2\pi} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} = 0$

# Zespolony logarytm i zespolona potęga

**Definicja:** Logarytmem naturalnym z liczby zespolonej  $z$  (ozn.  $\text{Ln}(z)$ ) nazywamy liczbę zespoloną  $w$  taką, że  $z = e^w$ .

$$\blacksquare \quad z_1 z_2 = e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_1 + w_2} \quad \Rightarrow \quad \ln(z_1 z_2) = w_1 + w_2 = \ln(z_1) + \ln(z_2)$$

Zapiszemy liczbę  $z$  w postaci wykładniczej i znajdziemy jej logarytm:

Math  
Player

$$z = |z| \exp \left[ i \left( \text{Arg}(z) + 2k\pi \right) \right] \quad \Rightarrow \quad \ln(z) = \ln|z| + i \left( \text{Arg}(z) + 2k\pi \right)$$

**Przykład:**  $\ln(-i) = \ln \left( \exp \left( i \left( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right) \right) = i \left( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = -i \frac{\pi}{2}, \quad i \frac{3\pi}{2}, \quad i \frac{7\pi}{2}, \dots$

**Definicja:** Niech  $z$  i  $w \in \mathbb{C}$ . Potęgą liczby  $z = |z|e^{i\varphi}$  (gdzie faza  $\varphi = \text{Arg}(z) + 2k\pi$ )

o wykładniku  $w$  nazywamy wielkość  $z^w = \exp(w \ln(z)) = |z|^w \exp(i\varphi w)$  gdzie

$$|z|^w = |z|^{\text{Re } w} |z|^{i \text{Im } w} = |z|^{\text{Re } w} e^{i \text{Im } w \ln|z|} \quad \text{oraz} \quad e^{i\varphi w} = e^{-\varphi \text{Im } w} e^{i\varphi \text{Re } w}$$

A więc:  $|z^w| = |z|^{\text{Re } w} e^{-\varphi \text{Im } w}$  oraz  $\arg(z^w) = \ln|z| \text{Im } w + \varphi \text{Re } w$

**Przykład:** Oblicz  $z = i^{-2i}$

$$z = e^{\ln z} = e^{-2i \ln i} = \exp \left[ -2i \ln e^{i \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)} \right] = \exp \left[ -2i \cdot i \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right] = e^{\pi + 4k\pi}$$

# F. trygonometryczne zmiennej zespolonej

**Definicja:** Korzystając z postaci biegunowej i trygonometrycznej liczby zespolonej możemy zdefiniować funkcje sinus i cosinus w następujący sposób:

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

**Uwaga:** Definicje te spełniają wszystkie tożsamości trygonometryczne.

**Definicja:** W analogiczny sposób **definiujemy** sinus i cosinus liczby zespolonej:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

**Uwaga:** Także te definicje spełniają wszystkie standardowe wzory trygonometryczne, np.:

$$\sin(-z) = -\sin z \quad \cos(-z) = \cos z \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z$$

$$\cos^2 z - \sin^2 z = \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})^2 - \frac{1}{4}(e^{iz} - e^{-iz})^2 = \frac{1}{2}(e^{i2z} + e^{-i2z}) = \cos 2z$$

**Interpretacja funkcji zespolonej  $\sin z$ :**

$$\begin{aligned} \sin z = \sin(x + iy) &= \frac{1}{2i}(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}) = \frac{1}{2i}[e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x + i \sin x)] = \\ &= \sin x \left[ \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \right] + i \cos x \left[ \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \right] = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

Math  
Player



# Funkcje hiperboliczne zmiennej zespolonej

**Definicja:** Funkcje hiperboliczne zdefiniowane są w następujący sposób:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

**Własności funkcji hiperbolicznych:**

$$\begin{aligned} \sinh(-x) &= -\sinh x & \cosh(-x) &= \cosh x & \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x & \cosh^2 x + \sinh^2 x &= \cosh 2x & \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \end{aligned}$$

**Definicja:** W analogiczny sposób definiujemy sinus i cosinus hiperboliczny liczby zespolonej:

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$



**Uwaga:** Istnieją następujące związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi i hiperbolicznymi zmiennej zespolonej:

$$\sin iz = i \sinh z \quad \cos iz = \cosh z \quad \sinh iz = i \sin z \quad \cosh iz = \cos z$$

**Przykład:** Oblicz  $\cos(\pi - i)$

$$\cos(\pi - i) = \cos \pi \cosh(-1) - i \sin \pi \sinh(-1) = -\cosh(-1) = -\cosh 1 \approx -1.543$$

**Uwaga:** Widać, że  $\text{Im}(\cos z) = 0$  wzdłuż pionowych prostych dla których  $x = k\pi$ ,  $k=0, 1, \dots$