Matematyczne Metody Fizyki II

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 14

Twierdzenie Cayleya

Twierdzenie: (Cayleya) Każda grupa rzędu n jest izomorficzna z jakąś podgrupą grupy S_n.

D: Niech $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ i niech $g_i \in G$ będzie dowolnym elementem G. Wówczas zbiór $\{g_i g_1, \dots, g_i g_n\}$ zawiera wszystkie elementy G, a każdy element występuje tylko raz.

Wprowadzamy przyporządkowania:

$$\left.\begin{aligned} g_i \to P_{g_i} &= \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_i g_1 & g_i g_2 & \cdots & g_i g_n \end{pmatrix} \\ g_j \to P_{g_j} &= \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_j g_1 & g_j g_2 & \cdots & g_j g_n \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ oraz } g_i g_j \to P_{g_i g_j} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_i g_j g_1 & g_i g_j g_2 & \cdots & g_i g_j g_n \end{pmatrix}$$

Należy pokazać, że powyższe przyporządkowania określają izomorfizm grupy G w podgrupę grupy S_n, tzn. że spełniona jest relacja $P_{g_i} P_{g_j} = P_{g_i g_j}$

$$\begin{aligned} P_{g_i} P_{g_j} &= \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_i g_1 & g_i g_2 & \cdots & g_i g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_j g_1 & g_j g_2 & \cdots & g_j g_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} g_j g_1 & g_j g_2 & \cdots & g_j g_n \\ g_i g_j g_1 & g_i g_j g_2 & \cdots & g_i g_j g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_j g_1 & g_j g_2 & \cdots & g_j g_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_i g_j g_1 & g_i g_j g_2 & \cdots & g_i g_j g_n \end{pmatrix} = P_{g_i g_j} \end{aligned}$$

Twierdzenie Cayleya - przykłady

e	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
π_2	e	π_5	π_6	π_3	π_4
π_3	π_6	e	π_5	π_4	π_2
π_4	π_5	π_6	e	π_2	π_3
π_5	π_4	π_2	π_3	π_6	e
π_6	π_3	π_4	π_2	e	π_5

Przykład: Trójelementowa $\{e, \pi_6 = (123), \pi_5 = (321)\}$ podgrupa grupy S_3 jest izomorficzna z każdą grupą rzędu $n = 3$.

Przykład: Grupa S_4 ma podgrupy izomorficzne z czterogrupą i z czteroelementową grupą cykliczną C_4.

Czterogrupa:

e	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

$$P_e = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ e & a & b & c \end{pmatrix} = e \qquad P_b = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ b & c & e & a \end{pmatrix} = (eb)(ac)$$

$$P_a = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \end{pmatrix} = (ea)(bc) \qquad P_c = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ c & b & a & e \end{pmatrix} = (ec)(ab)$$

$$ab = c \quad \leftrightarrow \quad P_a P_b = (ea)(bc)(eb)(ac) = (ec)(ab) = P_c$$

$$ac = b \quad \leftrightarrow \quad P_a P_c = (ea)(bc)(ec)(ab) = (eb)(ac) = P_b$$

$$bc = a \quad \leftrightarrow \quad P_b P_c = (eb)(ac)(ec)(ab) = (ea)(bc) = P_a$$

Grupa cykliczna $\quad C_4 = \{e, a, b = a^2, c = a^3\}$

$$P_e = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ e & a & b & c \end{pmatrix} = e \qquad P_a = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & b & c & e \end{pmatrix} = (eabc)$$

$$P_b = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ b & c & e & a \end{pmatrix} = (eb)(ac) \qquad P_c = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ c & b & a & e \end{pmatrix} = (ecba)$$

Relacje równoważności i klasy

Definicja: Relacją równowżności na zbiorze S nazywamy związek, $x \sim y$, pomiędzy dwoma elementami $x, y \in S$, przy czym symbol $\sim$ musi spełniać warunki:

a) $x \sim x$ (zwrotność)

b) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (symetria)

c) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (przechodniość)

Lemat: Relacja równoważności na zbiorze S dzieli ten zbiór na klasy C_i takie,że:

a) x i y należą do tej samej klasy wtedy i tylko wtedy gdy $x \sim$y,

b) każdy element $w \in S$ należy dokładnie do jednej klasy.

D: (a) niech $x \in S$ oraz definiujemy $S_x = \{u \in S : x \sim u\} \Rightarrow S_x \subset S,\ x \in S_x$

oraz niech $y \in S$ oraz definiujemy $S_y = \{v \in S : y \sim v\} \Rightarrow S_y \subset S,\ y \in S_y$

Załóżmy, że $\left.\begin{array}{l} x \sim y \wedge z \in S_y \Rightarrow x \sim z \Rightarrow z \in S_x \\ y \sim x \wedge z \in S_x \Rightarrow y \sim z \Rightarrow z \in S_y \end{array}\right\} \Rightarrow S_x = S_y$

Niech $S_x = S_y \wedge y \in S_y \Rightarrow y \in S_x \Rightarrow x \sim y$

(b) wniosek z (a) - element $w \in S_w$

Twierdzenie: Dwa różne podzbiory S_x i S_y nie mają elementów wspólnych, a zbiór S daje się zapisać jako suma rozłącznych klas C_i, tzn. każdy element zbioru S należy do jednej i tylko jednej klasy.

D: (a) załóżmy, że $S_x \neq S_y$ mają wspólny element z, czyli $x \sim z$ oraz $y \sim z$

Z tego wynika (symetria i przechodniość), że $x \sim y$ a więc, że $S_x = S_y$

Wniosek: (b) Każdy element S albo należy do już istniejącej klasy, albo tworzy nową klasę.

A więc każdy element jest w jakiejś klasie.

Warstwy

Twierdzenie (Lagrange'a): Jeśli G jest grupą rzędu n, natomiast H jest jej podgrupą rzędu m, to n jest całkowitą wielokrotnością m.

D: Niech $x, y \in G$ oraz definiujemy $x \sim y$ jeśli $x^{-1}y \in H$, tzn. istnieje $h \in H: y = xh$

Relacja '$\sim$' jest relacją równoważności:

$$x^{-1}x = e \quad \Leftrightarrow \quad x \sim x$$

$$x^{-1}y \in H \;\Rightarrow\; (x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x \in H \quad \Leftrightarrow \quad x \sim y \;\Rightarrow\; y \sim x$$

$$x^{-1}y \in H \wedge y^{-1}z \in H \;\Rightarrow\; (x^{-1}y)(y^{-1}z) = x^{-1}z \in H \quad \Leftrightarrow \quad x \sim y \wedge y \sim z \;\Rightarrow\; x \sim z$$

A więc grupa G daje się przedstawić jako suma rozłącznych klas xH, każda o m elementach. Ponieważ mamy n elementów G, a każdy może być tylko w jednym ze zbiorów xH, więc n musi być wielokrotnością m.

Wniosek: Rząd dowolnego elementu grupy jest dzielnikiem rzędu grupy.

Dowód: Niech $g \in G$ oraz $g^m = e \;\Rightarrow\; \{e, g, g^2, \ldots, g^{m-1}\}$ tworzy grupę cykliczną rzędu m, a więc m jest dzielnikiem rzędu grupy G.

Wniosek: Grupa, której rząd jest liczbą pierwszą, musi być grupą cykliczną.

Definicja: Niech $H = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ będzie podgrupą rzdu m grupy G, której rząd wynosi n.

Niech $g \in G$ i $g \notin H$, wówczas $gH = \{gg_1, gg_2, \ldots, gg_m\}$ nazywamy warstwą lewostronną podgrupy H (analogicznie definiujemy warstwę prawostronnę Hg).

Własności warstw

Własności warstw:

- dwie warstwy są albo rozłączne albo identyczne:

  Niech warstwy $g_1 H$ oraz $g_2 H$ mają wspólny element.

  Czyli $\exists h_1, h_2 \in H: \; g_1 h_1 = g_2 h_2 \quad \Rightarrow \quad g_1 = g_2 h_2 h_1^{-1} \;\vee\; g_2 = g_1 h_1 h_2^{-1}$

  Ponieważ $h_1, h_2 \in H \quad \Rightarrow \quad h_2 h_1^{-1} \in H \;\; (h_1 h_2^{-1} \in H) \quad \Rightarrow \quad g_1 \in g_2 H \;\; (g_2 \in g_1 H)$

- warstwy $g_1 H$ oraz $g_2 H$ są identyczne wtedy i tylko wtedy gdy $g_2^{-1} g_1 \in H$

  $(\Leftarrow)$ Jeśli $g_2^{-1} g_1 \in H$ wtedy $g_1 = g_2 h_i \quad \Rightarrow \quad g_1 H = g_2 h_i H = g_2 H$

  $(\Rightarrow)$ Jeśli $g_1 H = g_2 H$, tzn. $g_2^{-1} g_1 H = H$. Ponieważ $e \in H$, czyli $g_2^{-1} g_1 e = g_2^{-1} g_1 \in H$.

- każdy element grupy G, należy do którejś lewostronnej warstwy gH

  Ponieważ $e \in H$, więc $g_i \in g_i H$

Przykład: Znajdź warstwy lewostronne właściwej podgrupy H grupy G w której mnożenie określone jest tabelką:

i	a	b	c	d	e
a	b	i	e	c	d
b	i	a	d	e	c
c	d	e	i	a	b
d	e	c	b	i	a
e	c	d	a	b	i

$$iH = \{ii, ia, ib\} = \{i, a, b\} \quad (= aH = bH)$$
$$cH = \{ci, ca, cb\} = \{c, d, e\} \quad (= dH = eH)$$

Warstwy - przykłady

Przykład: Znajdź warstwy lewostronne podgrupy $H = \{e, (12)\}$ grupy symetrycznej $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (321), (123)\}$.

$$\left.\begin{aligned} (13)\,H &= \{(13), (123)\} \\ (23)\,H &= \{(23), (321)\} \\ (123)\,H &= \{(123), (13)\} \\ (321)\,H &= \{(321), (23)\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; S_3 = H + \{(13), (123)\} + \{(23), (321)\}$$

Przykład: Znajdź warstwy lewostronne podgrupy $H = \{e, (123, (321)\}$ grupy symetrycznej $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (321), (123)\}$.

$$\left.\begin{aligned} (12)\,H &= \{(12), (13), (23)\} \\ (13)\,H &= \{(12), (13), (23)\} \\ (23)\,H &= \{(12), (13), (23)\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; S_3 = H + \{(12), (13), (23)\}$$

Elementy sprzężone i klasy

Definicja: Niech $g_1, g_2 \in G$, wówczas element g_2 jest sprzężony do g_1, jeśli $\exists g \in G: \; g_2 = g g_1 g^{-1}$

Przykład: Niech $x \sim y$ jeśli istnieje $g_i \in G$ takie że $y = g_i^{-1} x g_i$ (elementy sprzężone)

zwrotność: $x = e^{-1} x e$

symetria: $y = g_i^{-1} x g_i \;\Rightarrow\; (g_i^{-1})^{-1} y g_i^{-1}$

przechodniość: $y = g_i^{-1} x g_i \wedge z = g_j^{-1} y g_j \;\Rightarrow\; z = g_j^{-1} g_i^{-1} x g_i g_j = (g_i g_j)^{-1} x (g_i g_j)$

Sprzężenie, jako relacja równoważności, dzieli G na klasy - dwa elementy należą do tej samej klasy wtedy i tylko wtedy gdy są wzajemnie sprzężone.

Wnioski:

- element jednostkowy tworzy klasę samodzielnie: $z = g_i^{-1} e g_i = g_i^{-1} g_i = e$
- warunkiem koniecznym i wystarczającym aby dany element grupy tworzył samodzielnie klasę jest aby był przemienny ze wszystkimi elementami grupy:

  Niech x tworzy samodzielnie klasę, tzn. $y = g_i^{-1} x g_i \;\Rightarrow\; y = x$

  $x = g_i g_i^{-1} x g_i g_i^{-1} = g_i y g_i^{-1} = g_i x g_i^{-1} \;\Rightarrow\; x g_i = g_i x$
- w każdej grupie G zbiór S elementów tworzących samodzielnie klasy tworzy podgrupę abelową (tzw. centrum G):

  $x g_i = g_i x \wedge y g_i = g_i y \;\Rightarrow\; (xy) g_i = x g_i y = g_i (xy)$

  $x g_i = g_i x \;\Rightarrow\; x^{-1} g_i = g_i x^{-1}$

Elementy sprzężone, klasy

Przykład: Znajdź klasy elementów sprzężonych w grupie G w której iloczyn dany jest tabelką:

i	a	b	c	d	e
a	b	i	e	c	d
b	i	a	d	e	c
c	d	e	i	a	b
d	e	c	b	i	a
e	c	d	a	b	i

Element jednostkowy i tworzy klasę samodzielnie.

$$\begin{array}{lll} i^{-1}ai = ia = a & d^{-1}ad = dc = b & b^{-1}bb = ib = b \\ a^{-1}aa = ia = a & e^{-1}ae = ed = b & c^{-1}bc = cd = a \\ b^{-1}ab = ai = a & i^{-1}bi = ib = b & d^{-1}bd = de = a \\ c^{-1}ac = ce = b & a^{-1}ba = bi = b & e^{-1}be = ec = a \end{array}$$

Czyli $\{a, b\}$ tworzą odrębną klasę elementów sprzężonych w G.

Podobnie znajdujemy, że $\{d, c, e\}$ tworzą kolejną klasę elementów sprzężonych:

$$\begin{array}{rcllllll} x & : & i & a & b & c & d & e \\ x^{-1}cx & : & c & e & d & c & e & d \end{array} \qquad \begin{array}{rcllllll} x & : & i & a & b & c & d & e \\ x^{-1}dx & : & d & c & e & e & d & c \end{array} \qquad \begin{array}{rcllllll} x & : & i & a & b & c & d & e \\ x^{-1}ex & : & e & d & c & d & c & e \end{array}$$

A więc elementy $\{c, d, e\}$ należą do jednej klasy.

Grupa G daje się podzielić na trzy klasy elementów sprzężonych: $\{i\}, \{a, b\}, \{c, d, e\}$

Do centrum grupy G należy tylko jej element jednostkowy.

Elementy sprzężone, klasy

Lemat: Elementy należące do jednej klasy muszą być tego samego rzędu.
Niech $g_1, g_2 \in C$ czyli $g_2 = g g_1 g^{-1}$, oraz niech $g_1^n = e$ oraz $g_1^m \neq e$ dla $m < n$;
Niech $g_2^m = e$ dla $m < n$

$$\Rightarrow \; e = g_2^m = (g g_1 g^{-1})^m = g g_1 g^{-1} g g_1 g^{-1} ... g g_1 g^{-1} = g g_1^m g^{-1}$$

a więc $g_1^m = e$ czyli sprzeczność z założeniem.
Natomiast $g_2^n = g g_1^n g^{-1} = g g^{-1} = e$, czyli rząd g_2 jest równy rzędowi g_1.

Wniosek: Jeżeli rzędy dwóch elementów grupy są różne, to nie mogą one należeć do tej samej klasy.

Przykład: W grupie $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (321)\}$ mamy następujące klasy:

$$C_1 = \{e\}, \;\; C_2 = \{(12), (13), (23)\}, \;\; C_3 = \{(123), (321)\}$$

Uwaga: W grupie S_n podział na klasy jest zgodny ze strukturą cykli.

Podgrupa sprzężona i niezmiennicza

Lemat: Jeśli H jest podgrupą G, to zbiór $H' = gHg^{-1}$, gdzie $g \in G$, jest także podgrupą G.

D: Niech $g_1, g_2 \in H \;\Rightarrow\; g_1 g_2 \in H$ oraz $g g_1 g^{-1}, g g_2 g^{-1} \in H'$

a więc $g g_1 g^{-1} g g_2 g^{-1} = g g_1 g_2 g^{-1} \in H'$ oraz $e = geg^{-1} \in H'$

element odwrotny $g g_1^{-1} g^{-1} \in H'$ bo $g g_1^{-1} g^{-1} g g_1 g^{-1} = e$

Definicja: Podgrupa $H' = gHg^{-1}$, gdzie $H \subset G$ i $g \in G$, nazywana jest podgrupą sprzężoną do podgrupy H w grupie G.

Definicja: Jeśli $H = gHg^{-1}$ dla każdego $g \in G$, to H nazywana jest podgrupą niezmienniczą (inwariantną, normalną).

Wniosek: Podgrupa H jest niezmiennicza wtedy i tylko wtedy gdy jej lewo i prawostronne warstwy utworzone dla dowolnych $g \in G$ są identyczne.

Wniosek: Podgrupy trywialne $\{e\}$ i G zawsze są niezmiennicze.

Przykład: $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (321)\}$

podgrupa $A = \{e, (12)\}$ nie jest inwariantna, bo np. $(13)\,A \neq A(13)$

podgrupa $B = \{e, (123), (321)\}$ jest inwariantna, bo $gB = Bg,\ \forall g \in G$

e	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
π_2	e	π_5	π_6	π_3	π_4
π_3	π_6	e	π_5	π_4	π_2
π_4	π_5	π_6	e	π_2	π_3
π_5	π_4	π_2	π_3	π_6	e
π_6	π_3	π_4	π_2	e	π_5

Podgrupy - grupa prosta i ilorazowa

Definicja: Grupa prosta to grupa nie posiadająca nietrywialnych podgrup inwariantnych.

Lemat: Podgrupa H grupy G jest inwariantna wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera całe klasy grupy G.

D: ($\Rightarrow$) Jeśli H jest inwariantna, $H = gHg^{-1}$, $g \in G$, to H zawiera całe klasy:

$\forall h \in H \wedge g \in G : ghg^{-1} \in H$

Ale elementy ghg^{-1} tworzą klasę $C \in H$, czyli H zawiera zawsze pełne klasy.

($\Leftarrow$) Jeśli H zawiera całe klasy, $C \in H$, to H jest inwariantna:

jeżeli $h \in H \;\Rightarrow\; h \in C$ i wszystkie elementy $ghg^{-1} \in C \subset H$, co oznacza, że

$\forall g \in G : gHg^{-1} = H$, czyli H jest inwariantna.

Definicja: (mnożenie warstw) $g_1 H \cdot g_2 H = \{g = x \cdot y : x \in g_1 H \wedge y \in g_2 H\}$

Definicja: Grupą ilorazową grupy G, ozn. G/H, nazywamy grupę złożoną z podgrupy inwariantnej H i wszystkich jej różnych warstw.

Sprawdzenie, że G/H jest grupą:

- $(gH)H = g(HH) = gH$ oraz $H(gH) = gHH = gH \;\Rightarrow\; e_{G/H} = H$
- $(g_1 H)(g_2 H) = g_1(g_2 H)H = g_1 g_2 H$ mnożenie warstw jest warstwą
- $gHg^{-1}H = gg^{-1}HH = eH = H$ czyli $g^{-1}H$ jest elementem odwrotnym do gH

Grupa ilorazowa - własności

Przykład: Grupa $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (321)\}$, jej podgrupa inwariantna $B = \{e, (123), (321)\}$ oraz warstwa $(12)B = \{(12), (13), (23)\}$ pozwalają utworzyć grupę ilorazową $S_3/B = \{E, A\}$ gdzie $E = B$ oraz $A = (12)B$.

Lemat: Niech będzie dany homomorfizm $f : G \to G/H$. Jądro homomorfizmu $Ker(f) = H$ tworzy podgrupę inwariantną w G.

D: $\forall h \in H = Ker(f) :\ f(h) = e' \in G/H$

$$\forall h \in H \wedge \forall g \in G :\ f(ghg^{-1}) = f(g) f(h) f(g^{-1}) = f(g) e' f^{-1}(g) = e' \;\Rightarrow\; ghg^{-1} \in H$$

czyli $H = gHg^{-1}$, a więc H jest podgrupą inwariantną.

Lemat: W każdym homomorfiźmie $f : G \to G/H$, jeżeli $g' \in G/H$ oraz $g' \neq e'$, to istnieje warstwa gH, gdzie $H = Ker(f)$, taka, że $f(gH) = g'$, tzn. całe warstwy są przekształcane w jeden element.

D: Niech $(g_1 \in gH \;\Rightarrow\; g_1 = gh)$ oraz $f(g) = g'$ i $f(h) = e' \in G/H$

Dla dowolnego $g_1 \in gH$ mamy $f(g_1) = f(gh) = f(g) f(h) = g'e' = g'$

Lemat: Przy dowolnym homomorfiźmie $f : G \to G/H$ rząd grupy G/H musi być dzielnikiem rzędu grupy G.

D: $Ker(f) = H$ oraz warstwy gH są równoliczne. Każda warstwa przechodzi w jeden element G/H. A więc rząd G to iloczyn rzędów H i G/H.

Grupa ilorazowa - przykłady

Przykład: Wyznaczanie nietrywialnych podgrup niezmienniczych grupy S_4 Podział grupy S_4 na klasy (podział na klasy zgodny ze strukturą cykli):

$$\begin{aligned}
&C_1(1) = \{e\} \\
&C_2(6) = \{(12),(13),(14),(23),(24),(34)\} \\
&C_3(8) = \{(123),(124),(134),(234),(132),(142),(143),(243)\} \\
&C_4(3) = \{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\} \\
&C_5(6) = \{(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432)\}
\end{aligned}$$

- podgrupy inwariantne muszą zawierać całe klasy,
- rząd podgrupy musi być dzielnikiem rzędu S_4; dzielnikami $4! = 24$ są: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$,
- podgrupa musi zawierać element e czyli klasę $C_1(1)$.

1. $H_1 = C_1(1) + C_4(3) = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

   H_1 jest czterogrupą; grupa ilorazowa S_4 / H_1 zawiera 6 elementów.
2. $H_2 = C_1(1) + C_3(8) + C_4(3) =$

   $= \{e, (123), (124), (134), (234), (321), (421), (431), (432), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

   Jest to tzw. podgrupa alternująca, czyli podgrupa permutacji parzystych A_4.

   Grupa ilorazowa $S_4 / A_4 = \{A_4, A\}$ gdzie A jest warstwą wszystkich permutacji nieparzystych.