Matematyczne Metody Fizyki II

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 15

Reprezentacje grup - formalizm

Elementy grup mogą być reprezentowane przez macierze:

$$\vec{u}' \equiv \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = g\vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}' = M(g)\vec{u}$$

Aby zachować konwencję, w której efekt działania elementu $g = g_1 g_2$ jest taki sam jak efekt działania najpierw elementu g_2, a następnie elementu g_1, jako macierz reprezentującą element $g \in G$ musimy wybrać $D(g) = M^T(g)$:

$$h = g_1 g_2 \quad \Rightarrow \quad D(h) = D(g_1)D(g_2) \quad \Rightarrow \quad D(g) = M^T(g) \quad \Rightarrow \quad \vec{u}' = D^T(g)\vec{u}$$

$$u_i''' = hu_i = g_1 g_2 u_i = g_1 \left[M(g_2)\right]_{ij} u_j = \left[M(g_2)\right]_{ij} g_1 u_j = \left[M(g_2)\right]_{ij} \left[M(g_1)\right]_{jk} u_k$$

$$\vec{u}''' = M(g_2)M(g_1)\vec{u} = D^T(g_2)D^T(g_1)\vec{u} = (D(g_1)D(g_2))^T \vec{u} = D^T(h)\vec{u}$$

Definicja: n-wymiarowa reprezentacja grupy G to homomorficzne odwzorowanie grupy G w zbiór macierzy $D = \{D(g)\}$ o wymiarach $n \times n$.

Własności:

- $D(e) = I_n$
- $D(g_1 g_2) = D(g_1)D(g_2)$ dla dowolnych elementów $g_1, g_2 \in G$
- $D(gg^{-1}) = D(g)D(g^{-1}) = I_n \quad \Rightarrow \quad D(g^{-1}) = [D(g)]^{-1}$

Reprezentacje grup - przykład

Przykład: Znajdź 6-wymiarową reprezentację grupy permutacji S_3 wykorzystując jako składowe wektora bazowego uporządkowane trójki liter:

$$u_1 = \{PQR\}, \quad u_2 = \{QPR\} \quad u_3 = \{RQP\},$$
$$u_4 = \{PRQ\}, \quad u_5 = \{RPQ\}, \quad u_6 = \{QRP\}.$$

Elementy grupy S_3 i tabelka mnożenia grupowego:

$$e = (1)(2)(3), \quad \pi_2 = (3)(12) \quad \pi_3 = (2)(13),$$
$$\pi_4 = (1)(23), \quad \pi_5 = (132), \quad \pi_6 = (123).$$

e	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
π_2	e	π_5	π_6	π_3	π_4
π_3	π_6	e	π_5	π_4	π_2
π_4	π_5	π_6	e	π_2	π_3
π_5	π_4	π_2	π_3	π_6	e
π_6	π_3	π_4	π_2	e	π_5

Znajdziemy reprezentację macierzową elementu $\pi_6 = (123) = (13)(12)$

$$\begin{aligned}
u_1' &= \pi_6 u_1 = (123)\{PQR\} = \{RPQ\} = u_5 \\
u_2' &= \pi_6 u_2 = (123)\{QPR\} = \{RQP\} = u_3 \\
u_3' &= \pi_6 u_3 = (123)\{RQP\} = \{PRQ\} = u_4 \\
u_4' &= \pi_6 u_4 = (123)\{PRQ\} = \{QPR\} = u_2 \\
u_5' &= \pi_6 u_5 = (123)\{RPQ\} = \{QRP\} = u_6 \\
u_6' &= \pi_6 u_6 = (123)\{QRP\} = \{PQR\} = u_1
\end{aligned}$$

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \vec{u} \equiv M(\pi_6)\vec{u}$$

Czyli reprezentacja macierzowa elementu π_6 to macierz: $D(\pi_6) = M^T(\pi_6)$

Znajdziemy reprezentację macierzową elementu $\pi_3 = (13)$

$$\begin{aligned}
u'_1 &= \pi_3 u_1 = (13)\{PQR\} = \{RQP\} = u_3 \\
u'_2 &= \pi_3 u_2 = (13)\{QPR\} = \{RPQ\} = u_5 \\
u'_3 &= \pi_3 u_3 = (13)\{RQP\} = \{PQR\} = u_1 \\
u'_4 &= \pi_3 u_4 = (13)\{PRQ\} = \{QRP\} = u_6 \\
u'_5 &= \pi_3 u_5 = (13)\{RPQ\} = \{QPR\} = u_2 \\
u'_6 &= \pi_3 u_6 = (13)\{QRP\} = \{PRQ\} = u_4
\end{aligned}$$

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \end{pmatrix} \vec{u} \equiv M(\pi_3)\vec{u}$$

Czyli reprezentacja macierzowa elementu π_3 to macierz: $D(\pi_3) = M^T(\pi_3)$

Znajdziemy reprezentację macierzową elementu $\pi_2 = (12)$

$$\begin{aligned}
u'_1 &= \pi_2 u_1 = (12)\{PQR\} = \{QPR\} = u_2 \\
u'_2 &= \pi_2 u_2 = (12)\{QPR\} = \{PQR\} = u_1 \\
u'_3 &= \pi_2 u_3 = (12)\{RQP\} = \{QRP\} = u_6 \\
u'_4 &= \pi_2 u_4 = (12)\{PRQ\} = \{RPQ\} = u_5 \\
u'_5 &= \pi_2 u_5 = (12)\{RPQ\} = \{PRQ\} = u_4 \\
u'_6 &= \pi_2 u_6 = (12)\{QRP\} = \{PRP\} = u_3
\end{aligned}$$

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \end{pmatrix} \vec{u} \equiv M(\pi_3)\vec{u}$$

Czyli reprezentacja macierzowa elementu π_2 to macierz: $D(\pi_2) = M^T(\pi_2)$

Widać, że zachodzi: $D(\pi_3)D(\pi_2) = D(\pi_6)$

Reprezentacje grupy S_3

Reprezentacje macierzowe pozostałych elementów e, $\pi_4 = (23)$, $\pi_5 = (132)$:

$$D(e) = I_6 \qquad D(\pi_4) = \begin{pmatrix} . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \end{pmatrix} \qquad D(\pi_5) = \begin{pmatrix} . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Przykład: Znajdź 3-wymiarową reprezentację grupy S_3 wykorzystując jako składowe wektora bazowego trzy ustalone punkty będące wierzchołkami trójkąta równobocznego oraz fakt, że S_3 jest izomorficzna z grupą 2D operacji symetrii na takim trójkącie.

$$\begin{pmatrix} Q \\ R \\ P \end{pmatrix} = (123) \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} R \\ Q \\ P \end{pmatrix} = (13) \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D(\pi_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D(\pi_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(\pi_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(\pi_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(\pi_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Zachodzą np. $D(\pi_4)D(\pi_2) = D(\pi_5)$, $D(\pi_4)D(\pi_6) = D(\pi_3), \ldots$

Reprezentacje grupy S_3

Przykład: Znajdź 2-wymiarową reprezentację grupy permutacji S_3

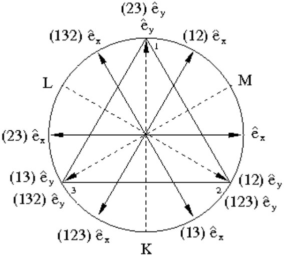
Rozważmy transformacje wektorów bazowych płaszczyzny e_x, e_y związane z operacjami symetrii 2D na trójkącie równobocznym.

$$e = (\,), \qquad \pi_2 = (12), \qquad \pi_3 = (13)$$

$$\pi_4 = (23), \qquad \pi_5 = (132), \qquad \pi_6 = (123)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{e}'_x \\ \hat{e}'_y \end{pmatrix} = (12)\begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{e}'_x \\ \hat{e}'_y \end{pmatrix} = (13)\begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{pmatrix}$$



$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D(\pi_2) = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad D(\pi_3) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$D(\pi_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D(\pi_4) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad D(\pi_6) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Reprezentacje regularne

Definicja: Reprezentacja regularna grupy G to odwzorowanie elementów $g_\nu \in G$ w zbiór macierzy o wymiarze $n \times n$, gdzie n jest rzędem grupy, postaci $D_{kl}(g_\nu) = \delta_{ik}\delta_{jl}$ gdzie $g_i = g_\nu g_j$

Uwaga: W każdym wierszu i w każdej kolumnie macierzy D_{kl} występują same "0" i jedna "1". Macierze te są nieosobliwe oraz $\det(D(g_\nu)) = \pm 1$ (ponieważ mogą być otrzymane z macierzy jednostkowej przez przestawienie wierszy i kolumn).

Lemat: Zbiór macierzy $\{D(g_\nu)\}$ tworzy grupę, zatem stanowi reprezentację grupy G.

D: $g_i = e g_i \;\Rightarrow\; D_{kl}(e) = \delta_{ik}\delta_{il} = \delta_{kl}$ - macierz jednostkowa,

$g_\nu \neq e \;\Rightarrow$ warunek $g_i = g_\nu g_j$ może być spełniony tylko dla $i \neq j$, tzn. $D_{kl}(g_\nu) = \delta_{ik}\delta_{jl}$ mogą mieć niezerowe wartości tylko dla $k \neq l$.

zdefiniowane odwzorowanie zachowuje działanie grupowe:

$$\sum_k D_{ik}(g_\nu) D_{kj}(g_\mu) = \left\{ \begin{array}{c} g_m = g_\nu g_n \\ g_r = g_\mu g_s \end{array} \right\} = \sum_k \delta_{im}\delta_{kn}\delta_{kr}\delta_{js} = \delta_{im}\delta_{js}\delta_{nr} \overset{(*)}{=} \delta_{im}\delta_{js} = D_{ij}(g_\nu g_\mu)$$

$$(\star)\; \delta_{nr} \;\Rightarrow\; n = r \;\Rightarrow\; g_n = g_\mu g_s \;\Rightarrow\; g_m = g_\nu(g_\nu g_s) = (g_\nu g_\mu) g_s \;\Rightarrow\; D_{ij}(g_\mu g_\mu) = \delta_{im}\delta_{js}$$

Reprezentacje regularne - przykład

Przykład: Znajdź rep. regularną grupy cyklicznej $C_4 = \{a_1 = e, a_2 = a, a_3 = a^2, a_4 = a^3\}$

Relacje $D_{kl}(a_\nu) = \delta_{ik}\delta_{jl}$ gdzie $a_i = a_\nu a_j$ prowadzą do:

$$
\begin{array}{llllll}
\nu = 1 \quad \text{czyli} \quad a_\nu = e: & a_1 = ea_1 & a_2 = ea_2 & a_3 = ea_3 & a_4 = ea_4 \\
\nu = 2 \quad \text{czyli} \quad a_\nu = a: & a_2 = aa_1 & a_3 = aa_2 & a_4 = aa_3 & a_1 = aa_4 \\
\nu = 3 \quad \text{czyli} \quad a_\nu = a^2: & a_3 = a^2a_1 & a_4 = a^2a_2 & a_1 = a^2a_3 & a_2 = a^2a_4 \\
\nu = 4 \quad \text{czyli} \quad a_\nu = a^3: & a_4 = a^3a_1 & a_1 = a^3a_2 & a_2 = a^3a_3 & a_3 = a^3a_4
\end{array}
$$

$$
D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad
D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad
D(a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad
D(a^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Reprezentacje równoważne

Lemat: Jeżeli $D(g_\nu)$ jest reprezentacją grupy G oraz S jest nieosobliwą macierzą to macierze $D'(g_\nu) = S^{-1}D(g_\nu)S$ także tworzą reprezentacje. Reprezentacje $D(g_\nu)$ i $D'(g_\nu)$ nazywamy reprezentacjami równoważnymi.

$D'(e) = S^{-1}D(e)S = S^{-1}I_nS = I_n$

$D'(g_\nu)D'(g_\mu) = S^{-1}D(g_\nu)SS^{-1}D(g_\mu)S = S^{-1}D(g_\nu)D(g_\mu)S = S^{-1}D(g_\nu g_\mu)S = D'(g_\nu g_\mu)$

Przykład: Znajdź rep. regularną grupy cyklicznej $C_3 = \{a_1 = e, a_2 = a, a_3 = a^2\}$

Relacje $D_{kl}(a_\nu) = \delta_{ik}\delta_{jl}$ gdzie $a_i = a_\nu a_j$ prowadzą do:

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Przykład: Znajdź rep. otrzymaną z rep. reg. grupy C_3 poprzez transformację podobieństwa $(\omega = \exp(i2\pi/3))$:

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}, \Rightarrow D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad D(a^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

Uwaga: 1-dim repr. $C_3: D(e) = 1, D(a) = \exp(i2\pi/3), D(a^2) = \exp(i4\pi/3)$

Reprezentacje redukowalne

Rozważmy reprezentacje $D^{(1)}, D^{(2)}, ..., D^{(N)}$ (mogą być różnych wymiarów) grupy G.
Możemy skonstruować nową reprezentację D:

$$D(x) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(x) & & & 0 \\ & D^{(2)}(x) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D^{(N)}(x) \end{pmatrix}$$

Mówimy, że reprezentacja D jest redukowalna, a każda z macierzy $D(x)$ może być zapisana jako suma prosta mniejszych reprezentacji:

$$D(x) = D^{(1)}(x) \oplus D^{(2)}(x) \oplus ... \oplus D^{(N)}(x)$$

Może się zdarzyć, że niektóre lub nawet wszystkie spośród macierzy $D^{(1)}$, $D^{(2)}$, ... , $D^{(N)}$ mogą być w dalszym ciągu redukowalne.

Jeśli jednak wszystkie macierze $D^{(i)}$ doprowadzimy do postaci które nie mogą być już dalej redukowane, to poszczególne bloki nazywamy nieredukowalnymi reprezentacjami grupy G (irreps of G; oznaczenie D').

Niech irrep $D'^{(i)}$ występuje m_i razy w reprezentacji D. Zapisujemy to w postaci:

$$D = m_1 D'^{(1)} \oplus m_2 D'^{(2)} \oplus ... \oplus m_N D'^{(N)}$$

Irreps stanowią podstawowe elementy teorii reprezentacji i służą do analizy dowolnej sytuacji fizycznej która jest niezmiennicza względem danej grupy symetrii G.

Reprezentacje nieredukowalne

Interpretacja struktury macierzowej reprezentacji nieredukowalnych:

- Składowe wektora bazowego odpowiadające wierszom macierzy D zawierającym bloki jednoelementowe (1×1) są niezmiennicze względem działania grupy G. Mówimy, że taka współrzędna (lub funkcja) transformuje się zgodnie z jednowymiarową irrep grupy G.
- Jeśli w dowolnej spośród g (rząd G) macierzy D, blok odpowiadający danej składowej (lub funkcji) wektora bazowego, ma wymiar $n \times n$, wówczas ta współrzędna jest mieszana przez operację symetrii z $n-1$ innymi współrzędnymi. Mówimy, że transformuje się zgodnie z n-wymiarową irrep grupy G.

Interpretacja irreps w języku przestrzeni wektorowych:

Definicja: Mówimy, że w przestrzeni wektorowej V nad ciałem liczb zespolonych określona jest reprezentacja T grupy G jeśli dane jest odwzorowanie, które każdemu elementowi $g \in G$ przyporządkowuje operator liniowy $T(g)$ przy czym spełnione są warunki:

$$T(e) = I \quad \text{oraz} \quad T(g_1)T(g_2) = T(g_1 g_2) \quad \text{dla każdego} \quad g_1, g_2 \in G$$

Definicja: Podprzestrzeń wektorową W przestrzeni V nazywamy niezmienniczą względem reprezentacji T jeśli $\forall \vec{v} \in W \wedge \forall g \in G$ zachodzi $T(g)\vec{v} \in W$.

Definicja: Reprezentację T nazywamy redukowalną jeśli w V istnieje nietrywialna podprzestrzeń niezmiennicza. W przeciwnym wypadku reprezentacja jest nieredukowalna.

Elementy macierzowe reprezentacji: $T(g)\hat{e}_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}(g)\hat{e}_k \quad \Rightarrow \quad t(g) = \left[t_{ki}(g)\right]$

Reprezentacje nieredukowalne

Uwaga: Reprezentację która jest izomorfizmem nazywamy reprezentacją wierną.

Uwaga: Odwzorowanie $D(g) = I_n$ jest reprezentacją, ale nie jest reprezentacją wierną.

Przykład: Reprezentacje nieredukowalne grupy S_3.

- reprezentacja dwuwymiarowa (wierna)

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{(12)} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad M_{(13)} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$M_{(23)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{(132)} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad M_{(123)} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

- każda grupa ma irrep w której każdemu elementowi przyporządkowana jest macierz jednostkowa 1×1, czyli po prostu liczba 1.
- irrep w której permutacjom parzystym przyporządkowana jest liczba 1, natomiast nieparzystym (-1).

	e	(12)	(13)	(23)	(132)	(123)
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	-1	-1	-1	1	1
E	M_e	$M_{(12)}$	$M_{(13)}$	$M_{(23)}$	$M_{(132)}$	$M_{(123)}$

Ortogonalność reprezentacji nieredukowalnych

Uwaga: Macierze odpowiadające irreps są ortogonalne (unitarne), a więc zbudowane są z wzajemnie ortogonalnych rzędów i kolumn.

Twierdzenie: Reprezentacje nieredukowalne dowolnej grupy G (rzędu g) są tak ortogonalne jak to tylko możliwe, w następującym sensie. Jeśli dla każdej irrep zbudujemy g-elementowe wektory z elementów z dowolnej, ustalonej pozycji z każdej spośród g macierzy to wówczas:

- dowolne dwa wektory pochodzące z różnych reprezentacji są wzajemnie ortogonalne,
- dowolne dwa wektory pochodzące z różnych pozycji w macierzy odpowiadającej tej samej irrep są wzajemnie ortogonalne.

  Formalnie można to zapisać w postaci ($D^{(\lambda)}$ oraz $D^{(\mu)}$ oznaczają, odpowiednio, n_λ- oraz n_μ-wymiarowe irreps grupy G):

$$\sum_x \left[D^{(\lambda)}(x)\right]^\star_{ij} \left[D^{(\mu)}(x)\right]_{kl} = \frac{g}{n_\lambda} \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{\lambda\mu}$$

Suma ta jest równa zero gdy:

- składowe wektorów nie pochodzą dokładnie z tych samych pozycji w każdej macierzy (łącznie z przypadkiem gdy nie jest to możliwe bo irreps $D^{(\lambda)}$ i $D^{(\mu)}$ mają różne wymiary),
- gdy składowe wektorów pochodzą z tych samych pozycji w macierzach $D^{(\lambda)}$ oraz $D^{(\mu)}$ mają te same wymiary, ale są różnymi irreps, $\lambda \neq \mu$.

Ortogonalność reprezentacji nieredukowalnych

Przykład: Relacje ortogonalności na przykładzie irreps A_1, A_2, E grupy S_3.

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{(12)} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad M_{(13)} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$M_{(23)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; M_{(132)} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \; M_{(123)} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

$$\sum_x \left[D^{(\lambda)}(x)\right]^\star_{ij} \left[D^{(\mu)}(x)\right]_{kl} = \frac{g}{n_\lambda} \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{\lambda\mu}$$

- niech $i = j = k = l = 1$, gdzie $D^{(\lambda)} = A_1$ oraz $D'^{(\mu)} = A_2$:

  $1(1) + 1(-1) + 1(-1) + 1(-1) + 1(1)1(1) = 0$, bo $\lambda \neq \mu$
- niech $(i, j) = (1, 2)$ oraz $(k, l) = (2, 2)$, gdzie $D^{(\lambda)} = D^{(\mu)} = E$:

  $0(1) + (\sqrt{3}/2)(-1/2) + (-\sqrt{3}/2)(-1/2) + 0(1) + (-\sqrt{3}/2)(-1/2) + (\sqrt{3}/2)(-1/2) = 0$,

  bo z różnych pozycji tej samej iirep
- niech $(i, j) = (1, 2)$ oraz $(k, l) = (1, 2)$, gdzie $D^{(\lambda)} = D^{(\mu)} = E$:

  $0(0) + (\sqrt{3}/2)(\sqrt{3}/2) + (-\sqrt{3}/2)(-\sqrt{3}/2) + 0(0) + (-\sqrt{3}/2)(-\sqrt{3}/2) + (\sqrt{3}/2)(\sqrt{3}/2) = 3$,

  bo z tej samej pozycji tej samej irrep