Matematyczne Metody Fizyki II

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 9

Dyfrakcja na okrągłym otworze przesłonie

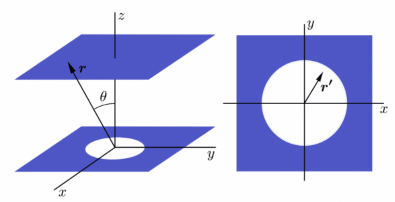
- Rozważmy falę płaską o długości λ, wektorze falowym $k = 2\pi/\lambda$ oraz częstości kołowej $\omega = ck$ padającą prostopadle na przesłonę z otworem o promieniu R. Jak wygląda obraz uzyskany na ekranie umieszczonym w odległości d od przesłony?
- Wyobraźmy sobie, że przestrzeń jest wypełniona przez elementarne źródła, które absorbują padającą na nie falę i emitują pochłoniętą energię w postaci fali sferycznej (izotropowo) o tej samej długości fali co fala padająca.
- Fale emitowane przez elementarne źródła znajdujące się w otoczeniu punktu $\vec{r}\,'$ o powierzchni da' dają wkład do całkowitej fali emitowanej z otworu (n to gestość powierzchniowa źródeł):

$$df(|\vec{r} - \vec{r}\,'|, t) = n\,\frac{e^{i(\omega t - k|\vec{r} - \vec{r}\,'|)}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,da'$$

gdzie $\vec{r}\,' = (r'\cos\phi', r'\sin\phi', 0)$

oraz (w pł. $x - z$): $\vec{r} = (r\sin\theta, 0, r\cos\theta)$

Element powierzchni: $da' = r'dr'd\phi'$



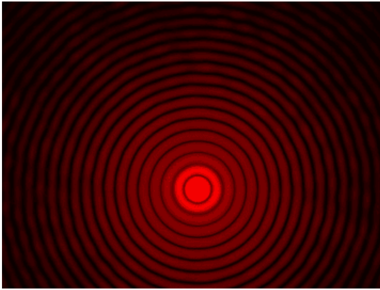
- $|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \left(r^2 - 2rr'\cos\theta\cos\phi' + r'^2\right)^{1/2} = r\left(1 - 2(r'/r)\cos\theta\cos\phi' + (r'/r)^2\right)^{1/2} =$

$$= \left\{ r'/r \ll 1 \right\} \approx r\,(1 - (r'/r)\cos\theta\cos\phi') = r - r'\cos\theta\cos\phi'$$

- Całkowita fala docierająca do punktu $\vec{r}$ dana jest całką (w mianowniku $|\vec{r} - \vec{r}\,'| \approx r$):

$$f(|\vec{r} - \vec{r}\,'|, t) = \frac{n}{r}\,e^{i(\omega t - kr)} \iint e^{ikr'\sin\theta\cos\phi'}\,da' = \frac{n}{r}\,e^{i(\omega t - kr)} \int_0^R r'dr' \int_0^{2\pi} e^{ikr'\sin\theta\cos\phi'}\,d\phi'$$

Dyfrakcja na okrągłym otworze w przesłonie



- Funkcja generująca funkcje Bessela:

$$g(t,x) = e^{\frac{1}{2}x(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

- Niech $t = ie^{i\phi}$, wtedy $t - \frac{1}{t} = 2i\cos\phi$ oraz:

$$g(t,x) = e^{ix\cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x) e^{in\phi}$$

- Korzystając z ortogonalności $\int_0^{2\pi} e^{-im\phi} e^{in\phi} d\phi = 2\pi\delta_{mn}$

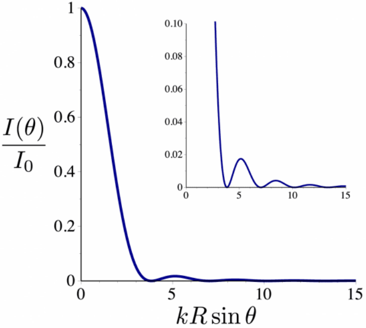
mamy: $$\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\phi} e^{-in\phi} d\phi = 2\pi i^n J_n(x)$$

- A więc:

$$f(\theta,t) = \frac{2\pi n}{r}\, e^{i(\omega t - kr)} \int_0^R J_0(kr'\sin\theta) r' dr' =$$
$$= \frac{N}{r} e^{i(\omega t - kr)} \left[\frac{2J_1(kR\sin\theta)}{kR\sin\theta}\right]$$

- Natężenie światła jest proporcjonalne do $|f|^2$:

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{2J_1(kR\sin\theta)}{kR\sin\theta}\right]^2$$



Harmoniki sferyczne

Harmonika sferyczna zdefiniowana jest jako $Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \Theta_{\ell,m}(\theta)\Phi_m(\phi)$, gdzie

$$\Theta_{\ell,m}(\theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, P_{\ell,m}(\cos\theta), \qquad \Phi_m(\phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$P_{\ell,m}(x)$ to tzw. stowarzyszone wielomiany Legendre'a:

$$P_{\ell,m}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_\ell(x) = \left\{ x = \cos\theta \right\} = \sin^m\theta \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\cos^m\theta}P_\ell(\cos\theta)$$

Harmoniki sferyczne tworzą ortonormalny układ zupełny na jednostkowej sferze:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\; Y^\star_{\ell,m}(\theta,\phi)Y_{\ell',m'}(\theta,\phi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

$$f(\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}Y_{\ell,m}(\theta,\phi), \qquad a_{\ell m} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\, Y^\star_{\ell,m}(\theta,\phi)f(\theta,\phi)$$

Twierdzenie o dodawaniu dla harmonik sferycznych:
gdzie $\hat{n}\cdot\hat{n}' = \cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$

$$P_\ell(\hat{n}\cdot\hat{n}') = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_{\ell,m}(\theta,\phi)Y^\star_{\ell,m}(\theta',\phi') = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y^\star_{\ell,m}(\theta,\phi)Y_{\ell,m}(\theta',\phi')$$

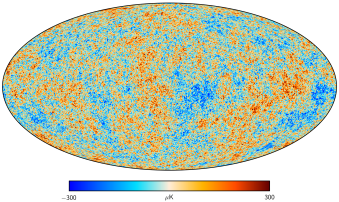
Harmoniki sferyczne - zastosowanie do anizotropii CMB

Satelity COBE (1992), WMAP (2003), Planck (2013) dokonały pomiaru fluktuacji temperatury w kosmicznym promieniowaniu tła (CMB) w funkcji kątów polarnych θ i ϕ. Jest to rozkład temperatury w chwili 360 000 lat po Wielkim Wybuchu, gdy Wszechświat stał się wystarczająco chłodny (3000 K) aby nastąpiła rekombinacja i atomy wodoru stały się stabilne, a Wszechświat transparentny dla promieniowania mikrofalowego. Średnia temperatura CMB wynosi $\overline{T} = 2.725\ \mathrm{K}$.

$$T(\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

$$a_{\ell m} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, Y^{\star}_{\ell,m}(\theta,\phi) T(\theta,\phi)$$

Współczynniki: $a_{0,0} = \overline{T}$, pozostałe $\propto\ \Delta T = T - \overline{T}$.



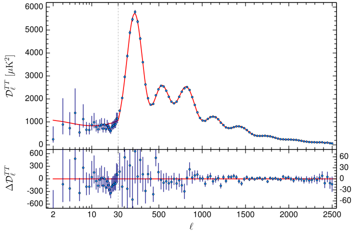
Spektrum mocy (angular power spectrum):

$$C_\ell = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell,m}|^2$$

Korzystając z twierdzenia o dodawaniu:

$$C_\ell = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^2\hat{n} \int \mathrm{d}^2\hat{n}'\, P_\ell(\hat{n}\cdot\hat{n}') T(\hat{n}) T(\hat{n}')$$

Fit: $H_0 = 70.4$ km/s/Mpc, wiek W. 13.77 mld. lat, ...



http://www.cosmos.esa.int/web/planck

Problem Sturma - Liouville'a

W problemach fizycznych często mamy do czynienia z równaniami postaci

$$y''(x) + P(x)y'(x) + (Q(x) + \lambda R(x))y(x) = 0$$

określonymi na przedziale $a < x < b$, w których λ jest parametrem.
Równanie tego typu posiada zawsze rozwiązanie trywialne $y(x) = 0$. Rozwiązania nietrywialne występują jedynie dla wybranych wartości λ.
Stosując czynnik całkujący $p(x) = \exp\left[\int P(x)\mathrm{d}x\right]$ równanie to można przepisać w postaci tzw. równania Sturma-Liouville'a:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right] + [q(x) + \lambda r(x)]y(x) = 0$$

gdzie $q(x) = p(x)Q(x)$, $r(x) = p(x)R(x)$, $p(x)$ oraz $p'(x)$ zakładamy, że są ciągłe na przedziale $a < x < b$.

Przykład: Oscylator: $y'' + n^2 y = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x) = 1, q(x) = 0, r(x) = 1, \lambda = n^2$

Równanie S-L uzupełnione o warunki brzegowe w $x = a$ oraz $x = b$ nosi nazwę problemu Sturm'a-Liouville'a.

Homogeniczne warunki brzegowe to warunki zadane w postaci:

$$A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0 \qquad B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0$$

Rozróżniamy trzy typy problemów S-L: regularny, periodyczny i osobliwy.

Regularny problem Sturma - Liouville'a

Regularny problem S-L to równanie S-L z homogenicznymi warunkami brzegowymi.

Przykład: Znajdź wartości własne i funkcje własne w problemie S-L zadanym przez $y'' + \lambda y = 0,\ 0 \leqslant x <\leqslant \pi,\ \ y(0) = 0,\ y'(\pi) = 0.$

Rozważamy trzy możliwe zakresy wartości parametru λ:

- $\lambda = 0$

Rozwiązanie ogólne równania ma postać $y(x) = C_1 x + C_2$.
Warunki brzegowe prowadzą do $C_1 = C_2 = 0$.
A więc dla $\lambda = 0$ istnieje tylko rozwiązanie trywialne $y(x) = 0$

- $\lambda = -\mu^2 < 0,\ \ \mu > 0$

Rozwiązanie ogólne równania ma postać $y(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$.
Warunki brzegowe: $C_1 + C_2 = 0$ oraz $2\mu C_1 \cosh \mu\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0$.

- $\lambda = \mu^2 > 0$

Rozwiązanie ogólne równania ma postać $y(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$.
Warunki brzegowe: $C_1 = 0$ oraz $\mu C_2 \cos \mu\pi = 0$.
Aby istniały nietrywialne rozwiązania musi zachodzić $C_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \mu\pi = 0$

czyli $\mu\pi = \pm\frac{1}{2}(2n+1)\pi \quad \Rightarrow \quad \mu_n = \pm\frac{1}{2}(2n+1)$

Periodyczny problem Sturma - Liouville'a

Wartości własne $\lambda_n = \mu_n^2$ oraz odpowiadające im funkcje własne mają postać:

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2}{4}, \qquad y_n(x) = \sin\frac{(2n+1)}{2}x, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Periodyczny problem S-L to równanie S-L z periodycznymi warunkami brzegowymi postaci:

$$p(a) = p(b), \quad y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b)$$

Przykład: Znajdź wartości własne i funkcje własne w problemie S-L zadanym przez $y'' + \lambda y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant L,\ \ y(0) = y(L),\ y'(0) = y'(L)$.

Rozważamy trzy możliwe zakresy wartości parametru λ:

- $\lambda = 0$

Rozwiązanie ogólne równania ma postać $y(x) = C_1 x + C_2$.
Warunki brzegowe prowadzą do
$y(0) = y(L): \quad C_1 L + C_2 = C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.$
$y'(0) = y'(L): \quad y'(x) = C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 \neq 0.$
A więc dla $\lambda = 0$ istnieje rozwiązanie w postaci $y(x) = C_2,\ C_2 \neq 0$

- $\lambda = -\mu^2 < 0,\ \ \mu > 0$

Rozwiązanie ogólne równania ma postać $y(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$.

Periodyczny problem Sturma - Liouville'a

Warunki brzegowe prowadzą do

$y(0) = y(L): \quad C_1(1 - e^{\mu L}) = C_2(e^{-\mu L} - 1).$
$y'(0) = y'(L): \quad C_1(1 - e^{\mu L}) = -C_2(e^{-\mu L} - 1).$

Oba warunki mogą być spełnione jednocześnie tylko dla $C_1 = C_2 = 0$.

A więc dla $\lambda < 0$ istnieje tylko rozwiązanie trywialne.

- $\lambda = \mu^2 > 0$

Rozwiązanie ogólne równania ma postać $y(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$.

Warunki brzegowe prowadzą do

$y(0) = y(L): \quad C_1(1 - \cos \mu L) = C_2 \sin \mu L.$
$y'(0) = y'(L): \quad C_2(1 - \cos \mu L) = -C_1 \sin \mu L.$

Eliminując z powyższych równań C_2 otrzymujemy
$2C_1(1 - \cos \mu L) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$ lub $\cos \mu L = 1$.

Jeśli $C_1 = 0$ wtedy $C_2 = 0$ i mamy tylko rozwiązanie trywialne.

Dla $C_1 \neq 0$ mamy $\cos \mu L = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu L = \pm 2n\pi \quad \Rightarrow \quad \mu_n = \pm 2n\pi / L$

A więc dla $\lambda > 0$ wartości własne i funkcje własne mają postać:

$$\lambda_n = 4n^2\pi^2/L^2 \qquad y_n(x) = C_1 \cos(2n\pi x/L) + C_2 \sin(2n\pi x/L), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Każdej wartości własnej odpowiadają dwie funkcje własne ($y_n^{(1)}(x)$ i $y_n^{(2)}(x)$).

Osobliwy problem Sturma-Liouville'a

Osobliwy problem S-L to równanie S-L w którym funkcje $p(x)$ i $r(x)$ znikają na jednym lub obu brzegach skończonego przedziału $a < x < b$ lub przedział określoności jest nieskończony.

Przykład: Znajdź wartości własne i funkcje własne w problemie S-L zadanym przez $x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - n^2)y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a$ tak aby $y(a) = 0$

Równanie to zapisane w formie równania S-L przyjmuje postać:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \left(k^2x^2 - n^2\right)y = 0$$

gdzie $p(x) = x,\ q(x) = -n^2/x,\ r(x) = x,\ \lambda = k^2$. Widać, że $p(0) = 0$, a więc jest to osobliwy problem S-L.

Rozwiązanie ogólne ma postać: $y(x) = C_1J_n(kx) + C_2Y_n(kx)$

Aby rozwiązanie było skończone na przedziale $0 \leqslant x \leqslant a$ musi zachodzić $C_2 = 0$.

Z warunku $y(a) = 0$ wynika, że $J_n(ka) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_n = j_{n,r}/a, \ \ r = 1, 2, \ldots$
gdzie $j_{n,r}, r = 1, 2, \ldots$ oznaczają kolejne miejsca zerowe funkcji Bessela.

Wartości własne i funkcje własne przyjmują postać:

$$\lambda_n = k_n^2 = j_{n,r}^2/a^2, \qquad y_r(x) = J_n(j_{n,r}x/a), \ \ r = 1, 2, \ldots$$

Własności wartości własnych

Własności wartości własnych i funkcji wałsnych w problemie S-L:

- Wszystkie wartości własne w problemie S-L są rzeczywiste.
- W regularnych i periodycznych p. S-L istnieje nieskończenie wiele różnych rzeczywistych wartości własnych takich, że $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ przy czym najmniejsza wartość λ_1 jest skończona oraz $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
- W regularnym p. S-L każdej wartości własnej odpowiada pojedyncza f. wł.
- Funkcje własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne na przedziale $a < x < b$ względem wagi $r(x)$.
- Niech λ_n będzie wartością własną, a $\varphi_n(x)$ odpowiadającą jej funkcją własną określoną na przedziale $a < x < b$ w regularnym p. S-L, wówczas:

$$\lambda_n = \frac{-[p\varphi_n\varphi_n']_a^b + \int_a^b p(\varphi_n')^2\mathrm{d}x - \int_a^b q\varphi_n^2\mathrm{d}x}{\int_a^b r\varphi_n^2\mathrm{d}x}$$

- Niech λ_n będzie wartością własną, a $\varphi_n(x)$ odpowiadającą jej funkcją własną określoną na przedziale $a < x < b$ w regularnym p. S-L. Jeśli $q(x) < 0$ oraz $[p(x)\varphi_n\varphi_n']_a^b \leqslant 0$ wówczas wszystkie wartości własne są nieujemne.
- n-ta funkcja własna w regularnym p. S-L zdefiniowanym na przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ ma dokładnie $n-1$ miejsc zerowych wewnątrz tego przedziału.

Operatory różniczkowe parzyste i nieparzyste

Przy transformacji parzysztości $x \to -x$, typowy wyraz transformuje się jak:

$$\left[x^n \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}\right] x^k = \frac{k!}{(k-r)!} x^{n+k-r} \quad \to \quad (-1)^{n+k-r} \frac{k!}{(k-r)!} x^{n+k-r}$$

a więc sam operator różniczkowy transformuje się jak:

$$L(x) \equiv x^n \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r} \quad \to \quad (-1)^{n-r} x^n \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r} \equiv L(-x)$$

Operator różniczkowy $L(\cdot)$ nazywamy parzystym (nieparzystym) gdy zachodzi odpowiednio:

$$L(-x) = L(x) \quad \text{lub} \quad L(-x) = -L(x)$$

Uwaga: Nie każdy operator ma określoną parzystość, ale każdy operator można przedstawić jako sumę operatora parzystego i nieparzystego:

$$L(x) = L_p(x) + L_n(x) = \frac{1}{2}[L(x) + L(-x)] + \frac{1}{2}[L(x) - L(-x)]$$

Uwaga: Jeśli $y(x)$ jest rozwiązaniem równania $L(x)y(x) = 0$ oraz operator $L(-x)$ jest dobrze określony, to zachodzi $L(-x)y(-x) = 0$.

Jeśli operator ma określoną parzystość, tzn. $L(x) = \pm L(-x)$, wówczas jeśli $y(x)$ jest rozwiązaniem równania, to również $y(-x)$ jest jego rozwiązaniem.

Wyznacznik Wronskiego (wronskian)

Jeśli zbiór funkcji $y_1(x), y_2(x), ..., y_N(x)$ jest liniowo zależny, to istnieje zbiór liczb $k_1, k_2, ..., k_N$ nie wszystkie równe zero taki, że:

$$0 = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + ... + k_N y_N(x)$$

Wyznacznikiem Wronskiego (wronskianem) nazywamy wyznacznik:

$$W(x) = |Y_{ij}(x)| = \left| y_j^{(i-1)}(x) \right|$$

Wronskian pozwala na znalezienie drugiego rozwiązania równania:

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$$

w sytuacji gdy znamy jedno z rozwiązań, w następujący sposób:

$$\begin{aligned} W(x) &= y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0 \\ W'(x) &= y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1'' = \\ &= -y_1(P(x)y_2' + Q(x)y_2) + y_2(P(x)y_1' + Q(x)y_1) = -P(x)(y_1y_2' - y_2y_1') = \\ &= -P(x)W(x) \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy (formuła Abela): $W(x) = W(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} P(x')\mathrm{d}x' \right]$

Drugie rozwiązanie metodą wronskianu

$$W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = y_1^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \quad \Rightarrow \quad y_2(x) = y_1(x)\left[\int^x \frac{W(x')}{y_1^2(x')}\mathrm{d}x' + C\right]$$

Ostatecznie drugie (liniowo niezależne) rozwiązanie ma postać:

$$y_2(x) = y_1(x)\int^x \frac{1}{y_1^2(x')}\exp\left[-\int^{x'} P(x'')\mathrm{d}x''\right]\mathrm{d}x'$$

Czy istnieje trzecie liniowo niezależne rozwiązanie r. drugiego rzędu?

$$y_j'' + P(x)y_j' + Q(x)y_j = 0, \quad j = 1,2,3$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ -Py_1' - Qy_1 & -Py_2' - Qy_2 & -Py_3' - Qy_3 \end{vmatrix} = 0$$

A więc równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu może mieć co najwyżej dwa niezależne rozwiązania.

Argumentując podobnie można się przekonać, że jednorodne równanie różniczkowe rzędu n może mieć co najwyżej n liniowo niezależnych rozwiązań.