

Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

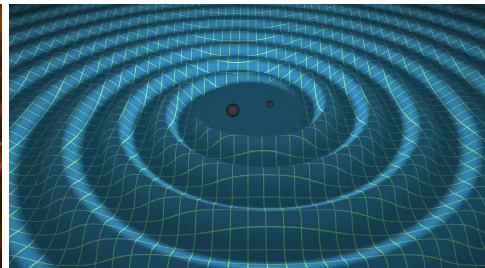
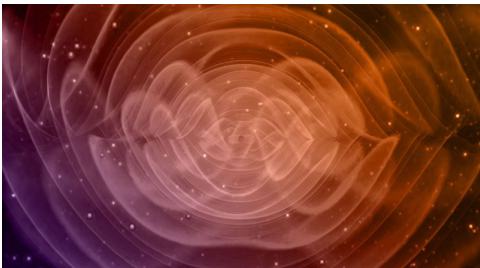
Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 14

Fale grawitacyjne

- Zgodnie ze STW informacja o polu grawitacyjnym wytwarzanym przez masę (lub energię) i jego zmianach (np. w rezultacie ruchu źródła) rozchodzi się w przestrzeni z prędkością światła.
- Fala grawitacyjna (FG) to zaburzenie metryki czasoprzestrzeni rozchodzące się w przestrzeni w postaci przyspieszeń pływowych.
- Energia FG maleje z odległością jak $1/r^2$, natomiast jej amplituda jak $1/r$.
- Eksperymentalnie jesteśmy w stanie zaobserwować tylko amplitudę FG (ze względu na bardzo słabe oddziaływanie (hipotetycznych) grawitonów z materią).
- FG obserwujemy poprzez pomiar zmian odległości pomiędzy dwoma masami testowymi zawieszonymi swobodnie w niewielkiej odległości.



Przybliżenie słabego pola grawitacyjnego

- Słabe pole grawitacyjne występuje w obszarze czasoprzestrzeni, który jest tylko "nieznacznie" zakrzywiony, a więc w którym metryka tylko nieznacznie różni się od metryki Minkowskiego ($\eta_{\mu\nu}$):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h_{\mu\nu}^2), \quad \text{gdzie } |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

- Można pokazać, że w przybliżeniu słabego pola, równania pola Einsteina przyjmują postać ($\square \equiv \partial_\sigma \partial^\sigma = (1/c)(\partial^2/\partial t^2) - \nabla^2$):

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -2\kappa T^{\mu\nu} \quad \text{z tzw. warunkiem cechowania} \quad \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$$

gdzie $\bar{h}^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h$ oraz $h \equiv \eta_{\mu\nu}h^{\mu\nu} = h^\mu{}_\mu$

- Ogólne rozwiązanie równań pola w próżni ($T^{\mu\nu} = 0$) można zapisać jako superpozycję fal płaskich:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} \exp(ik_\rho x^\rho) \quad \text{z warunkiem cechowania} \quad A^{\mu\nu} k_\nu = 0$$

gdzie $A^{\mu\nu}$ to symetryczny tensor stałych (zespolonych), a $k^\rho = (\omega/c, \vec{k})$ to 4-wektor falowy, który dla pustej przestrzeni spełnia warunek $k_\rho k^\rho = 0$.

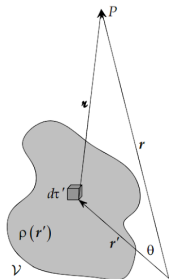
- W tzw. wycechowaniu TT (transverse-traceless), tensor $A^{\mu\nu}$ przyjmuje postać:

$$A_{\text{TT}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = h_+ e_+^{\mu\nu} + h_\times e_\times^{\mu\nu}$$

Rozwinięcie multipolowe

- Potencjał pochodzący od dowolnego rozkładu ładunku $\rho(\vec{r}')$, w dużej od niego odległości ($r \gg r'$) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
 V(\vec{r}) &= k \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \left\{ \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1 + \epsilon)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} \epsilon^n \right\} = \\
 &= k \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{r} \left| 1 - 2 \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{r} + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right|^{-1/2} dV' = \\
 &= \frac{k}{r} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \left(1 - \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{r} + \frac{1}{2r^2} (3(\hat{r} \cdot \vec{r}')^2 - r'^2) + \mathcal{O} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \right) dV'
 \end{aligned}$$



Rozwinięcie multipolowe pozwala na zaniedbanie wyrazów wyższego rzędu w (r'/r) :

$$V(\vec{r}) = V_{\text{mon}}(\vec{r}) + V_{\text{dip}}(\vec{r}) + V_{\text{quad}}(\vec{r}) + \dots$$

$$V_{\text{mon}}(\vec{r}) = \frac{k}{r} \int_{V'} \rho(\vec{r}') dV' \quad - \text{potencjał ładunku punktowego}$$

$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\frac{k}{r^2} (\hat{r} \cdot \vec{p}) \quad \text{gdzie} \quad \vec{p} \equiv \int_{V'} \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV' \quad \text{nazywamy dipolem}$$

$$V_{\text{quad}}(\vec{r}) = \frac{3k}{2r^3} (\hat{r} \otimes \hat{r}) :: J \quad \text{gdzie} \quad J \equiv \int_{V'} \rho(\vec{r}') \left(\vec{r}' \otimes \vec{r}' - \frac{1}{3} I r'^2 \right) dV'$$

J to zredukowany moment kwadrupolowy. \otimes definiujemy przez: $(\vec{u} \otimes \vec{v})\vec{w} = \vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{w})$

Źródła fal grawitacyjnych

- W celu zrozumienia mechanizmu generacji FG, konieczne jest rozwiązanie pełnych zlinearyzowanych równań Einsteina sprzężonych do źródła. Takie rozwiązanie dla składowych przestrzennych przyjmuje postać:

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}(t_r) \quad \text{gdzie } t_r = t - r \quad \text{oraz } r = |\vec{x} - \vec{y}|.$$

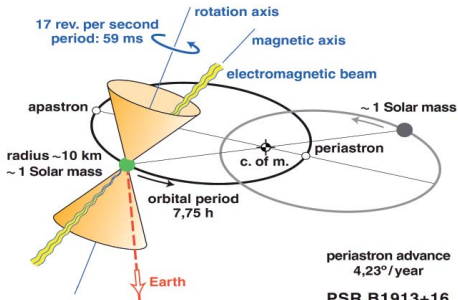
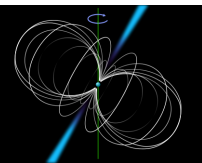
- $\bar{h}_{ij}(t, \vec{x})$ to zaburzenie pola grawitacyjnego w punkcie (t, \vec{x}) pochodzące od źródeł energii i pędu znajdujących się w punktach $(t_r, |\vec{x} - \vec{y}|)$ na stożku światła reprezentującym zdarzenia mogące mieć wpływ na (t, \vec{x}) .
- Tensor momentu kwadrupolowego gęstości energii źródła zdefiniowany jest jako:

$$I_{ij}(t) = \int y^i y^j T^{00}(t, \vec{y}) d^3 \vec{y}$$

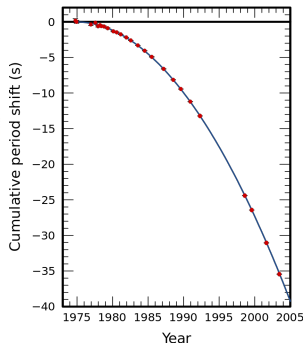
- Składowe czasowe $\bar{h}^{0\nu}$, $\bar{h}^{\mu 0}$ oraz \bar{h}^{00} można wyznaczyć na podstawie \bar{h}^{ij} .
- Zredukowany moment kwadrupolowy ma postać: $Q_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^{kl} I_{kl}$
- Uwaga:** W przeciwieństwie do FG, wiodący wkład do promieniowania EM pochodzi od zmiennego w czasie momentu dipolowego rozkładu gęstości ładunku elektrycznego środek ładunku elektrycznego może oscylować. Oscylacje środka masy łamałyby prawo zachowania pędu!

Pośredni dowód na istnienie fal grawitacyjnych

- W roku 1974 Hulse i Taylor zaobserwowali pulsar, z którego sygnały docierały do Ziemi (Arecibo) z systematycznie zmieniającym się opóźnieniem, co zinterpretowali jako układ podwójny (PSR B1913+16, odległość 21 000 ly, masy $1.441 M_{\odot} + 1.387 M_{\odot}$).
- Podczas obserwacji okazało się, że periastron (najbliższa odległość orbity od ogniska) przesuwa się "do przodu" o około 4.2° rocznie (precesja), a jednocześnie okres obiegu pulsara zmniejsza się - dokładnie tak jak przewiduje OTW na skutek emisji FG.



Moc emitowana w postaci FG: $7.35 \times 10^{24} \text{ W}$



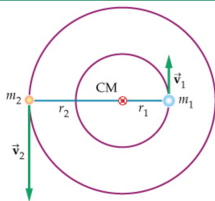
- The Nobel Prize in Physics 1993 was awarded jointly to R.A. Hulse and J.H. Taylor Jr. "for the discovery of a new type of pulsar, a discovery that has opened up new possibilities for the study of gravitation."

Fale grawitacyjne emitowane przez układ podwójny

- Dla uproszczenia rozważmy układ podwójny składający się z dwóch identycznych gwiazd, każda o masie M krążących po orbicie o promieniu R w płaszczyźnie x^1 - x^2 :

$$x_a^1 = R \cos \Omega t, \quad x_a^2 = R \sin \Omega t$$

$$x_b^1 = -R \cos \Omega t, \quad x_b^2 = -R \sin \Omega t$$



- Korzystając z przybliżenia Newtona wyznaczamy częstość kołową:

$$\frac{GM^2}{(2R)^2} = \frac{Mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{4R}} \Rightarrow \Omega = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{GM}{4R^3}}$$

- Gęstość energii:

$$\begin{aligned} T^{00}(t, \vec{x}) &= \\ &= M\delta(x^3) [\delta(x^1 - R \cos \Omega t) \delta(x^2 - R \sin \Omega t) + \delta(x^1 + R \cos \Omega t) \delta(x^2 + R \sin \Omega t)] \end{aligned}$$

- Składowe tensora momentu kwadrupolowego:

$$I_{11} = 2MR^2 \cos^2 \Omega t = MR^2(1 + \cos 2\Omega t)$$

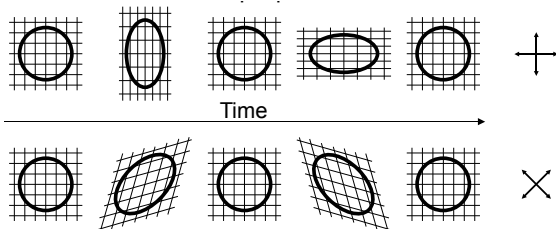
$$I_{22} = 2MR^2 \sin^2 \Omega t = MR^2(1 - \cos 2\Omega t)$$

$$I_{12} = I_{21} = 2MR^2(\cos \Omega t)(\sin \Omega t) = MR^2 \sin 2\Omega t$$

$$I_{i3} = 0$$

Polaryzacja fal grawitacyjnych

- $h_+(t - z)$ oraz $h_\times(t - z)$ to funkcje opisujące amplitudy dwóch liniowo niezależnych stanów polaryzacji fal grawitacyjnych ($e_+^{\mu\nu}$, $e_\times^{\mu\nu}$).



- Geometria czasoprzestrzeni w miejscu przechodzenia fali opisywana jest przez:

$$ds^2 =$$

$$dt^2 - (1 + h_+)dx^2 - (1 - h_+)dy^2 - 2h_\times dx dy - dz^2$$

- Złożenie stanów $e_+^{\mu\nu}$ oraz $e_\times^{\mu\nu}$ z dowolnymi amplitudami, pozwala na opis fali o dowolnej (poprzecznej) polaryzacji - np. kołowej.

Moc emitowana w formie FG

- Moc emitowana w postaci FG przez układ podwójny wyraża się wzorem:

$$P \equiv \frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5} \left\langle \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \right\rangle$$

gdzie średniowanie przebiega po pełnym okresie - tzn. $\langle \dots \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (\dots) dt$

W naszym przypadku (równe masy M krążące po orbicie o promieniu R):

$$Q_{ij} = \frac{MR^2}{3} \begin{pmatrix} 1 + 3 \cos 2\Omega t & 3 \sin 2\Omega t & 0 \\ 3 \sin 2\Omega t & 1 - 3 \cos 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} = 8MR^2\Omega^3 \begin{pmatrix} \sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t & 0 \\ -\cos 2\Omega t & -\sin 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Czyli moc emitowana przez układ podwójny wynosi:

$$P = -\frac{128}{5} GM^2 R^4 \Omega^6 = -\frac{2}{5} \frac{G^4 M^5}{R^5}$$

- Szybkość zmiany promienia orbity: $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dE} \frac{dE}{dt} = -\frac{16 G^3 M^3}{5 c^5 R^3}$

- Czas do połączenia BH (od orbity początkowej o promieniu R_0):

$$\Delta t_{\text{merge}} = \frac{1}{\alpha} \int_{R_0}^0 R^3 dR = -\frac{R_0^4}{4\alpha} \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \frac{16G^3 M^3}{5c^5}$$

- Podczas ruchu spiralnego zwiększa się częstość obrotu BH na orbicie $\Omega = 1/T$ - częstość emitowanej FG wynosi $f = 2\Omega$. Z III PK ($R^3/T^2 = \text{const}$) mamy:

$$T^2 = \frac{1}{\Omega^2} = \frac{4\pi^2}{GM} R^3 \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dR} \frac{dR}{dt} = -\frac{3}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{R^5}} \left[-\frac{16}{5} \frac{G^3 M^3}{c^5 R^3} \right] = \frac{96}{5 \cdot 2^{1/3} c^5} (GM)^{5/3} f^{11/3}$$

- Zaburzenie tensora metrycznego ma postać ($t_r = t - r$):

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{r}) = \frac{2}{r} \ddot{Q}_{ij}(t_r) = \frac{8GM}{r} \Omega^2 R^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Amplituda fal grawitacyjnych

- Definiujemy tensory bazy w układzie detektora i źródła:

$$\begin{aligned}
 e_+^{ij} &= \vec{e}_x^D \otimes \vec{e}_x^D - \vec{e}_y^D \otimes \vec{e}_y^D & E_+^{ij} &= \vec{e}_x^S \otimes \vec{e}_x^S - \vec{e}_y^S \otimes \vec{e}_y^S \\
 e_\times^{ij} &= \vec{e}_x^D \otimes \vec{e}_y^D + \vec{e}_y^D \otimes \vec{e}_x^D & E_\times^{ij} &= \vec{e}_x^S \otimes \vec{e}_y^S - \vec{e}_y^S \otimes \vec{e}_x^S
 \end{aligned}$$

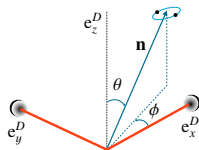
przy czym niech wektory $\vec{e}_{x,y}^{D,S}$ będą wektorami jednostkowymi, oraz niech $\vec{e}_x^D = \vec{e}_x^S$.

-
- Ogólne wyrażenia na amplitudy uwzględniające inklinację ι :

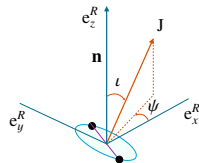
$$h_+(t_r) = \frac{8GM}{r} \Omega^2 R^2 \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos 2\Omega t_r$$

$$h_\times(t_r) = \frac{8GM}{r} \Omega^2 R^2 \cos \iota \sin 2\Omega t_r$$

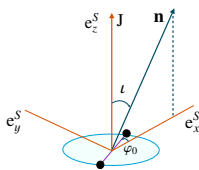
- Jeśli kierunek obserwacji pokrywa się z osią obratu układu BBH, wtedy $\cos \iota = \pm 1$ i FG jest spolaryzowana kołowo. Jeśli układ BBH obserwujemy z boku, $\cos \iota = 0$, wtedy FG jest spolaryzowana liniowo.



Detector frame



Radiation frame



Source frame

- **Przykład:** Dwie swobodne cząstki znajdują się w spoczynku w punktach $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ oraz $(x, y, z) = (L, 0, 0)$. FG o polaryzacji "+", częstości f oraz amplitudzie $h_0 \ll 1$ porusza się w kierunku osi z i w pewnym momencie przechodzi przez płaszczyznę $z = 0$. Jak zmienia się w czasie odległość pomiędzy cząstkami?

$$h(t, x, y, z) = h_0 \cos(2\pi f[t - z/c]) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-dl^2 = ds^2 = -(1 + h_+)dx^2 \Rightarrow dl = \sqrt{1 + h_+} dx \approx (1 + \frac{1}{2}h_+) dx$$

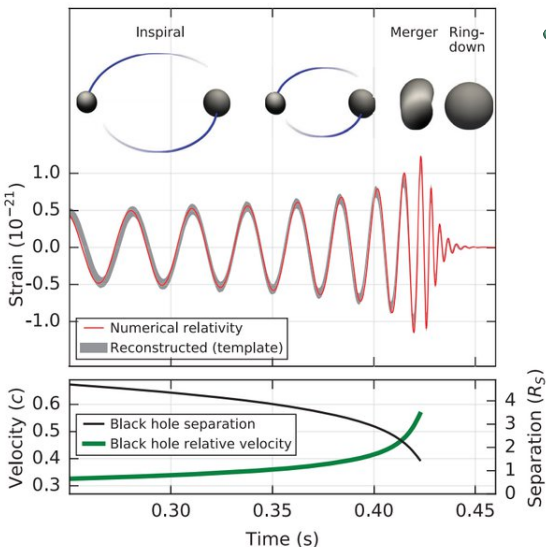
$$\text{A więc } l \approx \left[1 + \frac{1}{2}h_0 \cos(2\pi f[t - z/c])\right] L \Rightarrow \frac{\delta l}{L} = \frac{|l - L|}{L} \approx \frac{1}{2}h_0$$

- A więc względna różnica długości ramion interferometru: $\frac{\delta L}{L} \approx h_0$
- Amplituda FG emitowanej przez BBH:

$$\delta L \approx 10^{-22} \left(\frac{M}{2.8M_\odot}\right)^{5/3} \left(\frac{0.01 \text{ s}}{T}\right)^{2/3} \left(\frac{100 \text{ Mpc}}{r}\right) L$$

Przewidywana postać sygnałów w detektorach FG

- Symulowane sygnały pochodzące od różnych konfiguracji układów emitujących FG można znaleźć na stronie Współpracy SXS.



- FG jako sygnał dźwiękowy:

połączenie dwóch BH, każda o masie $10 M_{\odot}$:

Play 1

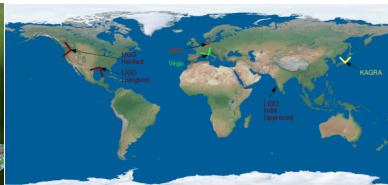
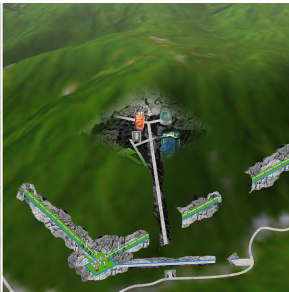
Play 2

FG we wczesnym Wszechświecie:

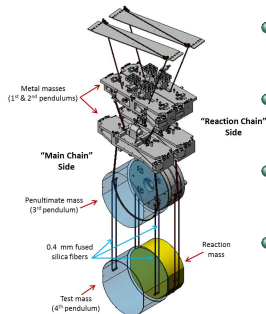
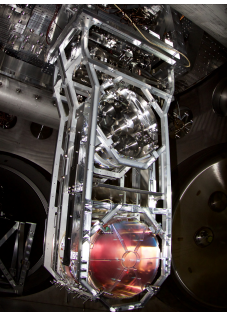
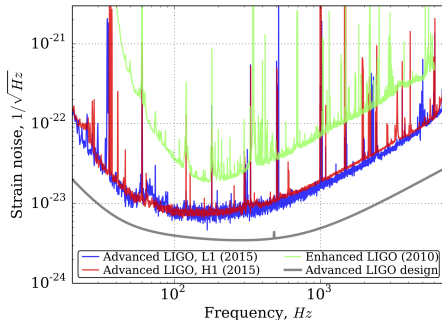
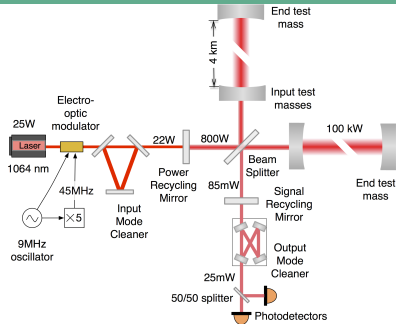
Play Sound

Światowa sieć spektrometrów fal grawitacyjnych

LIGO (Hanford & Livingston), **VIRGO** (near Pisa), **KAGRA** (Kamioka mine)



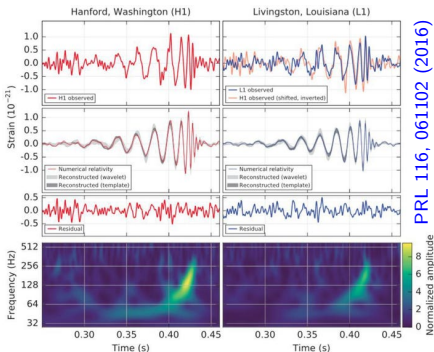
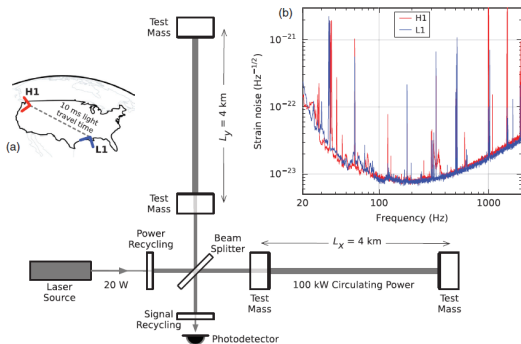
Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory



- Szum sejsmiczny i mechaniczny generowany na powierzchni Ziemi.
- Fluktuacje gradientu ziemskiego pola grawitacyjnego.
- Szum termiczny związany z masami testowymi, lustrami i ich zawieszeniem.
- "photon shot noise" - szum związany z fluktuacjami liczby fotonów i prądem rejestrowanym przez fotodetektor.

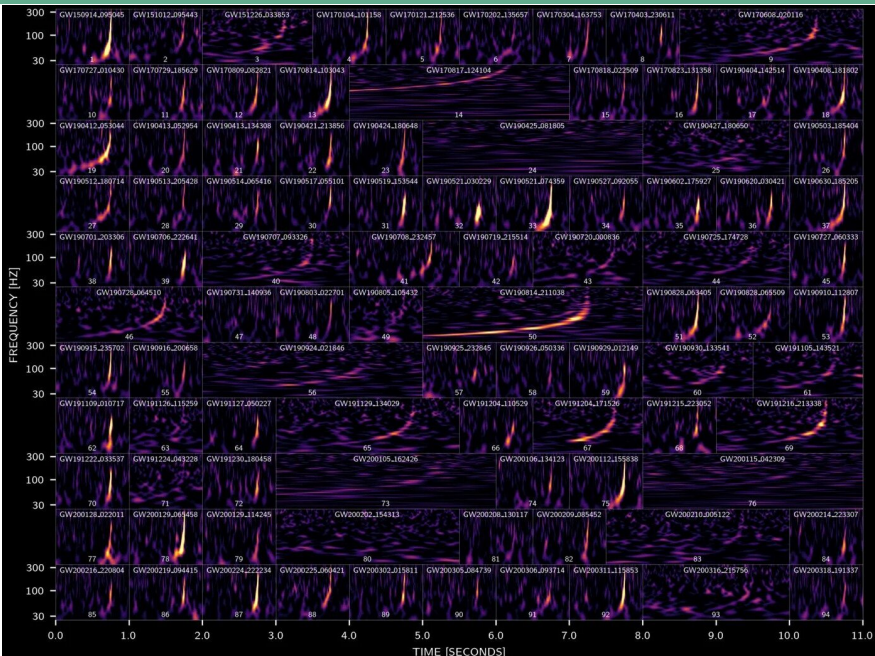
Pierwsza obserwacja FG przez LIGO

- Sygnał zgodny z modelem łączenia się dwóch BH (odległość: 460_{-180}^{+160} Mpc):
 Masa: $36_{-4}^{+5} M_{\odot} + 29_{-4}^{+4} M_{\odot} \Rightarrow 62_{-4}^{+4} M_{\odot}$ Spin: $0.67_{-0.07}^{+0.05}$
- Pomiar parametrów poprzez porównanie z milionami wzorców z 15-wymiarowej przestrzeni parametrów.



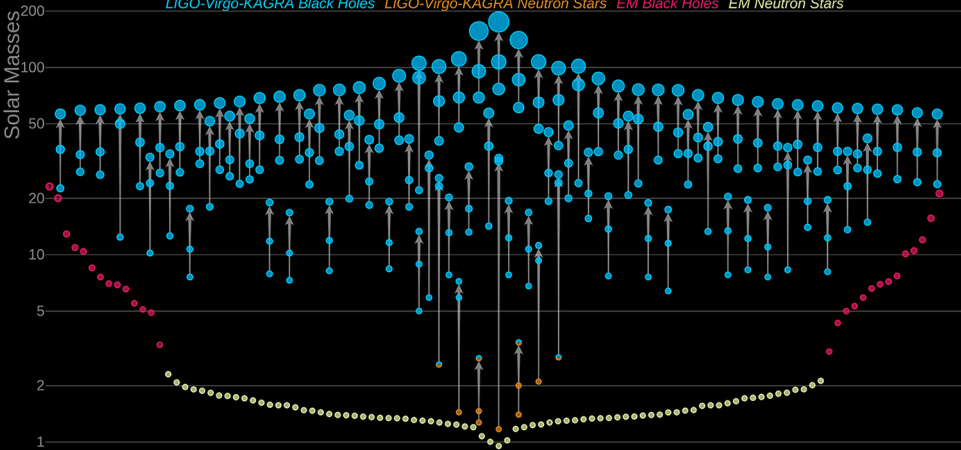
- The Nobel Prize in Physics 2017 was divided, one half awarded to Rainer Weiss, the other half jointly to Barry C. Barish and Kip S. Thorne "for decisive contributions to the LIGO detector and the observation of gravitational waves."

Podsumowanie dotychczasowych obserwacji - sygnały



Masses in the Stellar Graveyard

LIGO-Virgo-KAGRA Black Holes LIGO-Virgo-KAGRA Neutron Stars EM Black Holes EM Neutron Stars

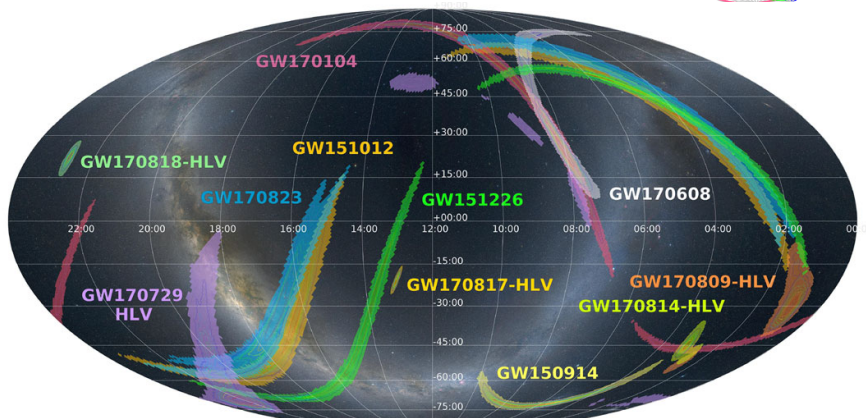
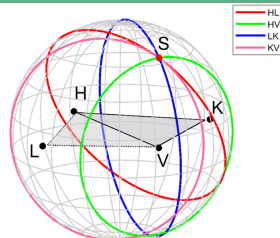


LIGO-Virgo-KAGRA | Aaron Geller | Northwestern

Wizualizacja wybranych źródeł FG

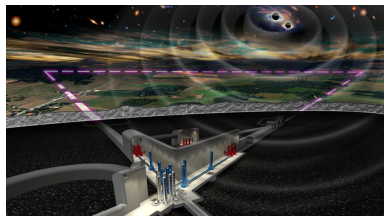
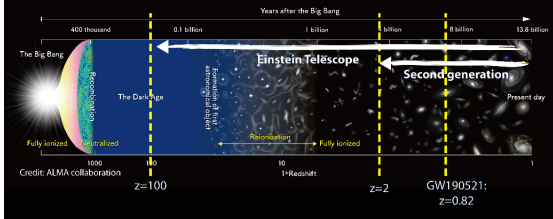
Lokalizacja źródeł fal grawitacyjnych

- Lokalizacja źródeł FG odbywa się na podstawie różnicy czasów rejestracji sygnału w różnych stacjach.
- Informacje o potencjalnym sygnale pochodzącym od FG przesyłane są natychmiast do wielu obserwatoriów astronomicznych na całym świecie w celu ich powiązania z obiektami obserwowanymi w różnych zakresach fal EM.

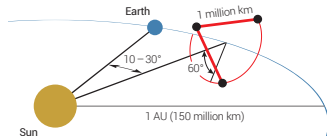


Plany na przyszłość

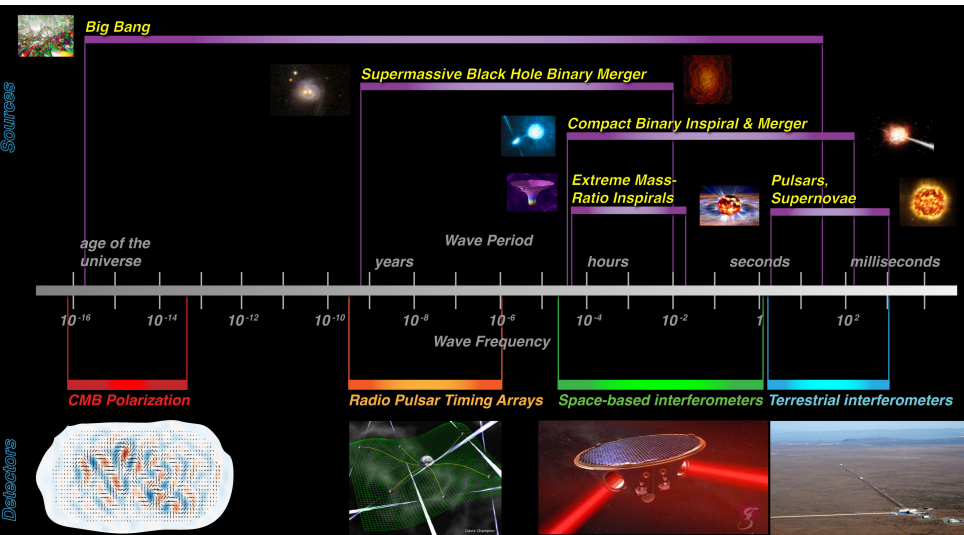
Detection horizon for black-hole binaries



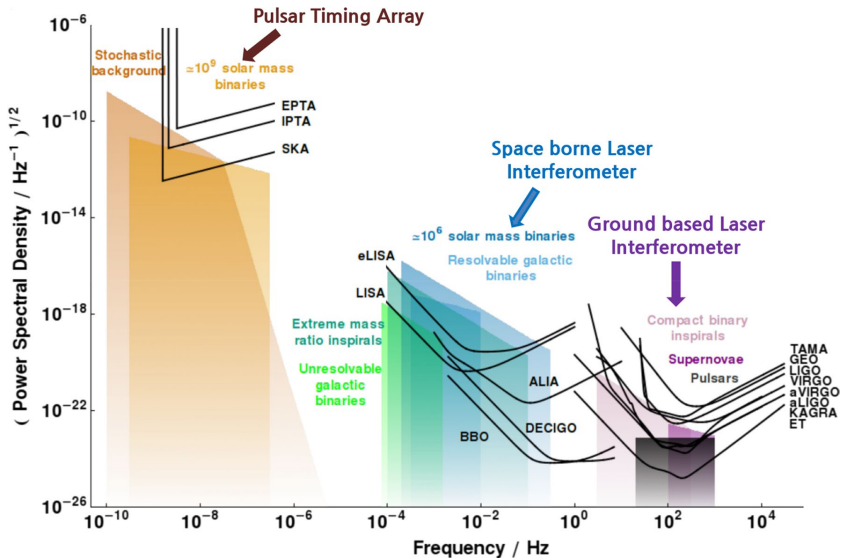
- **Einstein Telescope** (2030's) - Europejski interferometr FG o długości ramion 10 km umieszczony pod powierzchnią ziemi.
- **LISA** (2034) - Kosmiczny interferometr FG.
- **NANOGrav** - Galaktyczne obserwatorium FG - próba wykorzystania pulsarów jako systemu podobnego do GPS - zmiany pozycji Ziemi mogą być spowodowane zniekształceniami czasoprzestrzeni spowodowanymi przejściami FG.



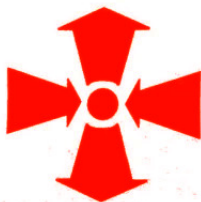
Spektrum FG oraz ich źródła i metody detekcji



Zakres czułości obecnych i przyszłych detektorów FG



- FG dostarczają nowej możliwości obserwacji i badania Wszechświata (większość dotychczasowych danych pochodzi z obserwacji za pomocą fal EM oraz neutrin i promieniowania kosmicznego) - można to porównać do dodania zmysłu słuchu istocie, która świat widziała wcześniej tylko oczami.
- FG bardzo słabo oddziałują z otoczeniem, dlatego dostarczają niezaburzonego obrazu zjawisk, których inaczej nie bylibyśmy w stanie dostrzec.
- Odkrycie FG to także ważny etap na drodze systematycznego poznawania natury Wszechświata poprzez naukę (fizykę) - minęło 100 lat od czasu sformułowania OTW do momentu eksperymentalnej weryfikacji kolejnego z przewidywań teorii.



**WARNING:
GRAVITATIONAL
RADIATION**