

Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 2

Dodawanie prędkości

Rozważmy obiekt poruszający się w układzie S' z prędkością \vec{u}' względem tego układu. Natomiast układ S' niech porusza się z prędkością v względem układu S w kierunku osi x .

$$S': \vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z) \quad \text{gdzie} \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

$$S: \vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \quad \text{gdzie} \quad u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

Transformacje prędkości:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + vdx'/c^2} = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(dt' + vdx'/c^2)} = \frac{u'_y}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma(dt' + vdx'/c^2)} = \frac{u'_z}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)}$$

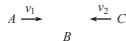
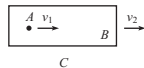
- Dla $u'_x, v \ll c$ dostajemy klasyczne prawo dodawania prędkości $u_x \approx u'_x + v$.
- Jeśli $u'_x = c$ lub $v = c$ w wyniku dodawania zawsze dostajemy $u_x = c$.
- Dodawanie do siebie prędkości mniejszych od c daje w wyniku zawsze prędkość mniejszą od c (nie można przyspieszyć cząstki do c).

Dodawanie prędkości - przykłady

Przykład: Kiedy stosujemy wzór na relatywistyczne dodawanie prędkości?

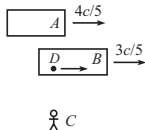
Niech $v_1 = v_2 = 0.9c$.

- prędkość A względem C : $v = (1.8/1.81)c = 0.9945c$
- względna prędkość A i C w układzie B :
 $v = v_1 + v_2 = 1.8c$



Przykład: Jak długo, z punktu widzenia każdego z obserwatorów A , B i C , trwa wyprzedzanie pociągu B przez pociąg A ? Długości spoczynkowe A i B są jednakowe.

- Obserwator C mierzy względną prędkość oraz długości A i B , a stąd czas wyprzedzania t_C :



$$v_{\text{rel}} = 4c/5 - 3c/5 = c/5,$$

$$L_A = L/\gamma_A = 3L/5, \quad L_B = L/\gamma_B = 4L/5 \quad \Rightarrow \quad t_C = \frac{L_A + L_B}{v_{\text{rel}}} = \frac{7L}{c}$$

- Obserwator B mierzy prędkość oraz długość A :

$$u = \frac{4c/5 - 3c/5}{1 - (4/5)(3/5)} = \frac{5}{13}c \quad \Rightarrow \quad \gamma(u) = \frac{13}{12} \quad \Rightarrow \quad L_A = \frac{12}{13}L$$

Dodawanie prędkości - przykłady

Czas wyprzedzania zmierzone przez obserwatora B : $t_B = \frac{L + L_A}{u} = \frac{5L}{c}$

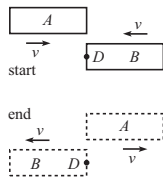
Taki sam czas zostanie zmierzony przez obserwatora A , który przeprowadzi zupełnie analogiczne rozumowanie jak obserwator B .

Przykład: Jak długo trwa wyprzedzanie z punktu widzenia obserwatora D poruszającego się ze stałą prędkością pomiędzy końcem i początkiem pociągu B , jeśli zdarzenia E_1 "zrównanie się początku A z końcem B " oraz E_2 "zrównanie się końca A z początkiem B " zachodzą dla tego obserwatora w tym samym miejscu?

Z punktu widzenia obserwatora D oba pociągi poruszają się z równymi i przeciwnie skierowanymi prędkościami v .

Wartość prędkości v wyznaczamy z punktu widzenia B :

$$\frac{2v}{1 + v^2/c^2} = \frac{5c}{13} \Rightarrow v = \frac{c}{5} \Rightarrow \gamma(v) = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$



Długości obu pociągów w układzie D są równe: $L_A = L_B = L/\gamma(v) = \frac{2\sqrt{6}}{5}L$.

Ponieważ E_1 i E_2 zachodzą w tym samym miejscu (D) dlatego podczas wyprzedzania każdy z pociągów musi przebyć odległość równą swojej długości, a

więc czas wyprzedzania w układzie D wynosi: $t_D = \frac{2\sqrt{6}L/5}{c/5} = \frac{2\sqrt{6}L}{c}$.

Aberracja światła gwiazd

Niech S będzie układem związanym ze Słońcem i gwiazdami stałymi, natomiast S' układem związanym z Ziemią.

Niech θ_0 będzie kątem pod jakim widać gwiazdę w układzie S , wówczas:

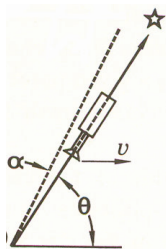
$$\begin{aligned}u_x &= -c \cos \theta_0 & u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} = -\frac{c \cos \theta_0 + v}{1 + \beta \cos \theta_0} \\u_y &= -c \sin \theta_0 & u'_y &= \frac{u_y}{1 - vu_x/c^2} = -\frac{c \sin \theta_0}{\gamma(1 + \beta \cos \theta_0)}\end{aligned}$$

W układzie związanym z Ziemią, teleskop należy ustawić pod kątem θ , takim że:

$$\left. \begin{aligned}u'_x &= -c \cos \theta \\u'_y &= -c \sin \theta\end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\gamma(\cos \theta_0 + \beta)}$$

Ponieważ $\beta \approx 10^{-4}$, więc:

$$\cos \theta = \frac{-u'_x}{c} = \frac{\cos \theta_0 + \beta}{1 + \beta \cos \theta_0} \approx (\cos \theta_0 + \beta)(1 - \beta \cos \theta_0) \approx \cos \theta_0 + \beta \sin^2 \theta_0$$



Niezmienniczy interwał czasoprzestrzenny

Z niezmienniczości prędkości światła wynika, że jeśli $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = 0$, to również spełniony jest warunek $c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = 0$.

Rozważmy transformację wielkości $\Delta s^2 \equiv c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$:

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &\equiv ct^2 - x^2 = c^2\gamma^2 \left(t'^2 + \frac{vx'}{c^2} \right)^2 - \gamma^2 (x' + vt')^2 = \\ &= \gamma^2 \left(c^2t'^2 + 2vx't' + \frac{v^2}{c^2}x'^2 - x'^2 - 2vx't' - v^2t'^2 \right) = \\ &= \gamma^2 \left(c^2t'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - x'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right) = c^2t'^2 - x'^2 = (\Delta s')^2\end{aligned}$$

A więc jeśli $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = b$ to również $c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = b$, dla dowolnego b .

Wielkość Δs nazywamy **niezmienniczym interwałem czasoprzestrzennym**.

Przykład: (dylatacja czasu) Rozważmy dwa zdarzenia zachodzące w początku układu S' w odstępie czasu t' .

$$\left. \begin{array}{l} S' : (x', t') = (0, t') \\ S : (x, t) = (vt, t) \end{array} \right\} \Rightarrow c^2t'^2 - 0 = c^2t^2 - v^2t^2 \Rightarrow t = \frac{t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma t'$$

Interpretacja fizyczna interwału Δs^2

- $\Delta s^2 > 0$ (zdarzenia rozdzielone 'czasopodobnie')
Ponieważ $c^2 t^2 > x^2$ więc istnieje takie $|v| = |x/t| < c$ dla którego $x' = \gamma(x - vt) = 0$, czyli istnieje S' w którym oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu, a wielkość $\Delta s/c = t'$ jest czasem własnym.
- $\Delta s^2 < 0$ (zdarzenia rozdzielone 'przestrzennopodobnie')
 $c^2 t^2 < x^2 \Rightarrow |t/x| < 1/c$. A więc istnieje takie $v = c^2 t/x < c$, że $t' = \gamma(t - vx/c^2) = 0$, czyli istnieje S' w którym oba zdarzenia zachodzą jednocześnie, a wielkość $|\Delta s|$ jest długością własną ($\Delta s^2 = c^2 t'^2 - x'^2 = x'^2$).
- $\Delta s^2 = 0$ (światlny, zerowy)
Ponieważ $c^2 t^2 = x^2$ więc $|x/t| = c$ w każdym układzie. A więc nie istnieje układ w którym oba zdarzenia byłyby jednoczesne lub zachodziły w tym samym miejscu (układ taki musiałby poruszać się z prędkością światła).

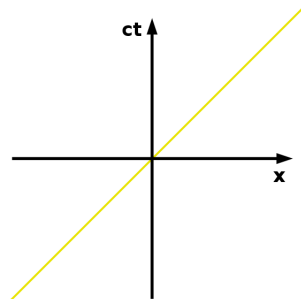
Przykład: Czy można znaleźć taki układ w którym Chrzest Polski i Bitwa pod Grunwaldem zaszłyby (a) w tym samym miejscu, (b) w tym samym czasie?

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 \approx 200 \text{ km} \\ t_1 - t_2 = 1410 - 966 = 444 \text{ lata} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta s^2 = 17.6 \cdot 10^{36} - 4 \cdot 10^{10} > 0$$

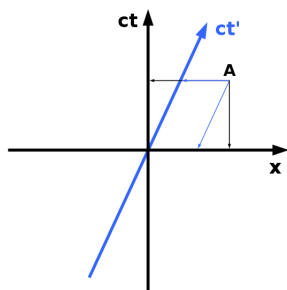
Interwał jest czasopodobny, więc istnieje więc taki układ w którym oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu. Układ taki porusza się od miejsca Chrztu do miejsca Bitwy z prędkością $v = (200 \text{ km})/(444 \text{ lata})$.

Diagramy czasoprzestrzenne

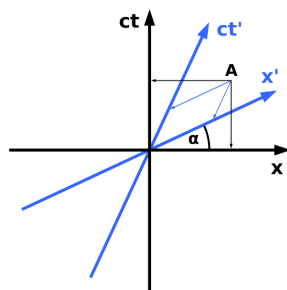
Współrzędne (t, x) dowolnego zdarzenia P przyjmują różne wartości w różnych układach odniesienia. Do opisu konieczna jest znajomość praw transformacyjnych.



Linia świata światła



Transformacja Galileusza



Transformacja Lorentza

t' – linia świata punktu O w układzie (x, t) ,

x' – prosta równoległa do dowolnej prostej łączącej zdarzenia jednoczesne i przechodząca przez punkt $t' = 0$.

Diagramy Minkowskiego - jednostki

- Kąt nachylenia i jednostka osi ct' :

$$(x', ct') = (0, 1) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma(t' + vx'/c^2) \end{array} \right| \Rightarrow (x, ct) = (\gamma v/c, \gamma)$$

A więc kąt nachylenia dany jest przez $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} = \beta$

'Na papierze': $\frac{1 \text{ jednostka } ct'}{1 \text{ jednostka } ct} = \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}$

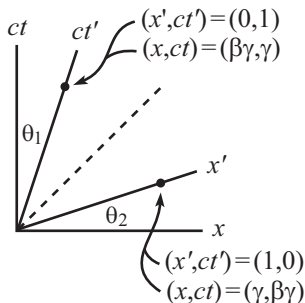
- Kąt nachylenia i jednostka osi x' :

$$(x', ct') = (1, 0) \Rightarrow (x, ct) = (\gamma, \gamma v/c)$$

A więc kąt nachylenia dany jest przez:

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{ct}{x} = \frac{v}{c} = \beta$$

'Na papierze': $\frac{1 \text{ jednostka } x'}{1 \text{ jednostka } x} = \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}$



Jednostkową długość na osi współrzędnej x wyznaczają punkty przecięcia z hiperbolą: $x^2 - c^2 t^2 = 1$

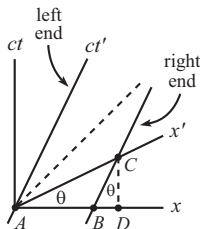
Diagramy Minkowskiego - przykład

Przykład: (skrócenie długości) Rozważmy pręt o długości 1 m spoczywający w układzie S' . Chcemy znaleźć długość pręta w układzie S .

$$S': AC = 1 \text{ m}$$

$$S: AC = \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}} \text{ - długość 'na papierze'}$$

$$\begin{aligned} AB &= AD - BD = (AC) \cos \theta - (AC) \sin \theta \operatorname{tg} \theta = \\ &= (AC) \cos \theta (1 - \operatorname{tg}^2 \theta) = \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}} \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned}$$

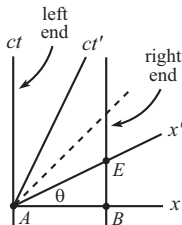


Przykład: (skrócenie długości) Rozważmy pręt o długości 1 m spoczywający w układzie S . Chcemy znaleźć długość pręta w układzie S' .

$$S: AB = 1 \text{ m}$$

$$S': AE = \frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{1 + \beta^2} \text{ - długość 'na papierze'}$$

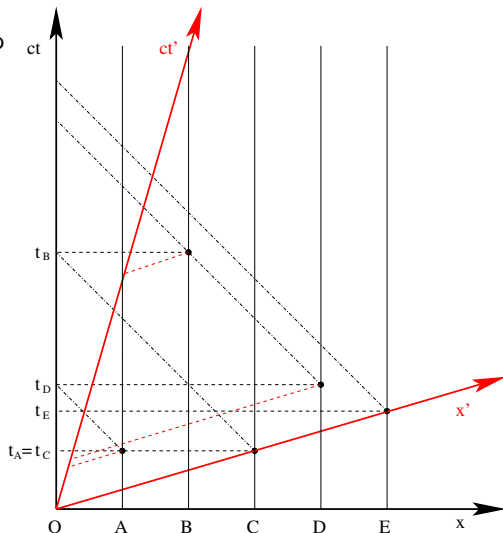
Ponieważ jednostka na osi x' ma długość $\frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, więc w jednostkach osi x' długość AE wynosi $\sqrt{1 - \beta^2}$.



Względność równoczesności - przykład

Lampy A, B, C, D, E umieszczono w równych odstępach wzdłuż osi x . W układzie w którym spoczywają, zapalają się w chwilach t_A, t_B, t_C, t_D i t_E .

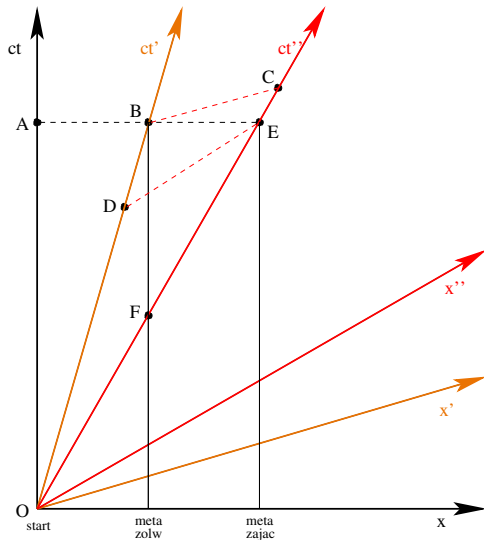
- Jaka jest kolejność zapalania się lamp w układach S i S' ?
- W jakiej kolejności światło lamp dociera do obserwatorów O i O' ?
- Gdzie znajduje się obserwator O' w chwili gdy dociera do niego światło lampy D ?



Wyścig zółwia i zająca I

Zając i żółw startują z tego samego miejsca, jednak meta dla żółwia jest o połowę bliżej niż dla zająca. Sędzia znajdujący się w spoczynku względem gruntu stwierdza remis.

- Które punkty oznaczają przekroczenie mety odpowiednio przez zająca i żółwia?
- W momencie gdy jedno z nich przekracza linie mety, gdzie znajduje się drugie?
- Kto wygrał według zająca?
- Czy żółw się zgadza się z zającem?

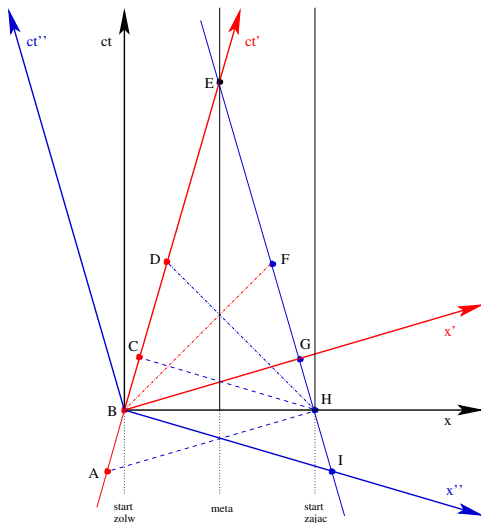


Wyścig zółwia z zajęcem II

Zajęc i żółw startują naprzeciw siebie i kończą na wspólnej linii mety, mając do przebycia jednakowe odległości. Sędzia znajdujący się w spoczynku względem gruntu stwierdza, że obaj wystartowali jednocześnie i jednocześnie przekroczyli linię mety.

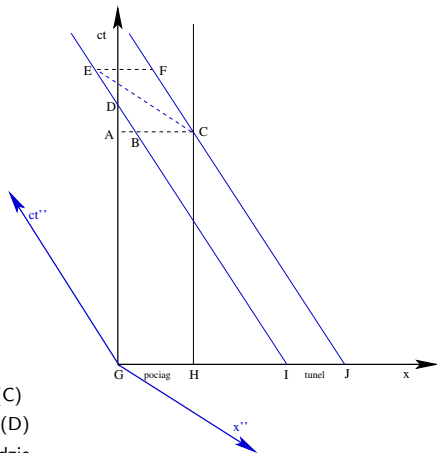
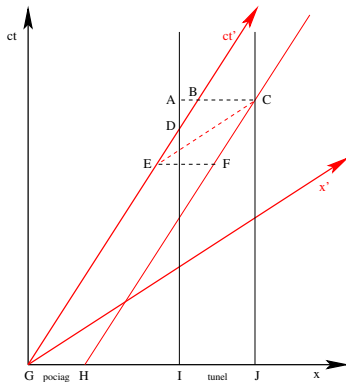
Podaj lokalizacje zdarzeń:

- żółw przekracza linię startu,
- gdzie wtedy (w układzie żółwia) znajduje się zajęc?
- zajęc widzi start żółwia,
- czy zgadzają się z sędzią co do równoczesnego przekroczenia linii startu i mety?



Pociąg przejeżdżający przez tunel

Pociąg i tunel mają jednakowe długości własne L_0 , i poruszają się ze względną prędkością v .



- W którym punkcie początek pociągu opuszcza tunel? (C)
- W którym punkcie koniec pociągu wjeżdża do tunelu? (D)
- W którym punkcie znajduje się koniec pociągu, w układzie związanym z pociągiem, w chwili gdy początek pociągu opuszcza tunel? (E)
- W którym punkcie znajduje się początek pociągu, w układzie związanym z tunelem, kiedy koniec pociągu wjeżdża do tunelu?
- Czy pociąg zmieści się w tunelu, w układzie związanym z tunelem? A w układzie związanym z pociągiem?