Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

Mariusz Przybycień

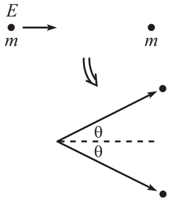
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 5

Zderzenie elastyczne cząstek

Przykład: Cząstka o masie m i energii E zderza się elastycznie z identyczną cząstką znajdującą się w spoczynku, w taki sposób, że obie rozpraszają się pod kątami θ względem kierunku ruchu cząstki padającej. Zapisz kąt θ poprzez E i m.

Czteropędy cząstek przed zderzeniem:



$$\mathrm{p}_1 = (E, p, 0, 0) \quad \mathrm{p}_2 = (m, 0, 0, 0) \quad p = \sqrt{E^2 - m^2}$$

Czteropędy cząstek po zderzeniu:

$$\mathrm{p}_1' = (E', p'\cos\theta, p'\sin\theta, 0) \qquad \mathrm{p}_2' = (E', p'\cos\theta, -p'\sin\theta, 0)$$

ZZEiP pozwalają zapisać: $\mathrm{p}_{1,2}' = \left(\frac{E+m}{2}, \frac{p}{2}, \pm\frac{p}{2}\operatorname{tg}\theta, 0 \right)$

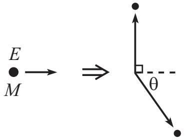
$$\left(p_{1,2}'\right)^2 = \left(\frac{E+m}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 (1 + \operatorname{tg}^2\theta) = m^2$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{E^2 - m^2}{E^2 + 2Em - 3m^2} = \frac{E+m}{E+3m}$$

Rozpad cząstki

Przykład: Cząstka o masie M i energii E rozpada się na dwie identyczne cząstki. W układzie laboratoryjnym są one emitowane pod kątami $\pi/2$ i θ. Znaleźć energie powstałych cząstek.

Czteropęd cząstki przed rozpadem:



$$\mathrm{p}_1 = (E, p, 0, 0) \quad \text{gdzie} \quad p = \sqrt{E^2 - M^2}$$

Czteropędy cząstek powstałych w wyniku rozpadu:

$$\mathrm{p}_1' = (E_1, 0, p_1, 0) \qquad \mathrm{p}_2' = (E_2, p_2\cos\theta, -p_2\sin\theta, 0) \qquad p_{1,2} = \sqrt{E_{1,2}^2 - m^2}$$

ZZP dla składowej x daje $p_2\cos\theta = p$, natomiast składowe y muszą być przeciwnego znaku, co prowadzi do:

$$\mathrm{p}_1' = (E_1, 0, p\,\mathrm{tg}\,\theta, 0) \qquad \mathrm{p}_2' = (E_2, p, -p\,\mathrm{tg}\,\theta, 0)$$

ZZE daje: $E = E_1 + E_2 = \sqrt{p^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta + m^2} + \sqrt{p^2(1+\mathrm{tg}^2\,\theta) + m^2}$

Ostatecznie dostajemy:

$$E_1 = \frac{E^2 - p^2}{2E} = \frac{M^2}{2E} \quad \text{oraz} \quad E_2 = \frac{E^2 + p^2}{2E} = \frac{2E^2 - M^2}{2E}$$

Jednostki w fizyce wysokich energii

Przykład: (rozpad cząstki, cd.)

$$\mathrm{p} - \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{p}^2 - 2\mathrm{p}\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_1^2 = \mathrm{p}_2^2$$

$$M^2 - 2EE_1 + m^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \frac{M^2}{2E}$$

$$E_2 = \frac{E^2 + p^2}{2E} = \frac{2E^2 - M^2}{2E}$$

Jednostki w fizyce cząstek elementarnych:

Energia spoczynkowa protonu:

$$\left.\begin{array}{l} E_p = m_p c^2 = (1.67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg})(3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}) \approx 1.5 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J} \\ 1\ \mathrm{eV} = (1.6022 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})(1\ \mathrm{J/C}) = 1.6022 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} \end{array}\right\} \Rightarrow E_p = 938\ \mathrm{MeV}$$

Mówimy, że masa protonu wynosi 938 MeV.

$m_p = 938.3$ MeV, $m_n = 939.6$ MeV, $m_\pi = 137$ MeV, $m_e = 0.511$ MeV, ...

$$1\mathrm{MeV}/c^2 = 1.783 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg}$$

Energia w układzie środka masy (CMS)

Przykład: W układzie LAB dane są czteropędy cząstek $p_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ oraz $p_2 = (E_2, \vec{p}_2)$. Jaka jest energia tego układu w CMS? Jaka jest prędkość CMS?

Uwaga: Ponieważ energia w CMS nie może zależeć od konkretnego układu LAB, więc musi dać się zapisać za pomocą wielkości niezmienniczych, które można skonstruować z wielkości danych:

$$p_1^2 = m_1^2, \qquad p_2^2 = m_2^2, \qquad p_1 p_2, \qquad (p_1 + p_2)^2, \qquad (p_1 - p_2)^2$$

W układzie CMS mamy (wielkości w CMS oznaczamy gwiazdką $\star$):

$$\vec{p}_1^{\,\star} + \vec{p}_2^{\,\star} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1^\star + p_2^\star = (E_1^\star + E_2^\star, 0) \quad \Rightarrow \quad E^\star = E_1^\star + E_2^\star$$

A więc

$$E^{\star\,2} = (E_1^\star + E_2^\star)^2 = (p_1^\star + p_2^\star)^2 \overset{\text{inv}}{=} (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = M^2$$

Ponieważ $E = \gamma M$ oraz $\vec{p} = \gamma M \vec{\beta}$ więc prędkość układu CMS dana jest przez:

$$\vec{\beta}_{\mathrm{CM}} = \frac{\vec{p}}{E} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{E_1 + E_2}, \qquad \gamma_{\mathrm{CM}} = \frac{E}{M} = \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}}$$

Energia cząstki w układzie spoczynkowym innej cząstki

Przykład: W układzie LAB dane są czteropędy cząstek $p_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ oraz $p_2 = (E_2, \vec{p}_2)$. Jaka jest energia cząstki 1 w układzie spoczynkowym cząstki 2?

W układzie spoczynkowym cząstki "1" zachodzi $\vec{p}_1 = 0$, więc:

$$p_1 p_2 = p_1' p_2' = E_1' E_2' = m_1 E_{21} \qquad \Rightarrow \qquad E_{21} = \frac{p_1 p_2}{m_1}$$

A stąd otrzymujemy:

$$|\vec{p}_{21}|^2 = E_{21}^2 - m_2^2 = \frac{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}{m_1^2} \qquad \text{oraz} \qquad v_{21}^2 = \frac{|\vec{p}_{21}|^2}{E_{21}^2} = \frac{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}{(p_1 p_2)^2}$$

Uwaga: wszystkie powyższe wielkości wyrażają się poprzez niezmienniki, które można obliczyć w dowolnym układzie!

W szczególności z punktu widzenia układu CMS (hipotetyczna cząstka o czteropędzie $P = p_1 + p_2$ i masie M) mamy:

$$p_1 p_2 = \frac{1}{2}\left[(p_1 + p_2)^2 - p_1^2 - p_2^2\right] = \frac{1}{2}(M^2 - m_1^2 - m_2^2)$$

$$E_i^\star = \frac{P p_i}{M} \quad \Rightarrow \quad E_{1,2}^\star = \frac{M^2 \pm (m_1^2 - m_2^2)}{2M} \quad \Rightarrow \quad E_1^\star + E_2^\star = M$$

$$|\vec{p}^\star|^2 = |\vec{p}_i^\star|^2 = \frac{\left[M^2 - (m_1 + m_2)^2\right]\left[M^2 - (m_1 - m_2)^2\right]}{4M^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_i^{\star\,2} = \left(\frac{|\vec{p}^\star|}{E_i^\star}\right)^2$$

Energia w CMS - przykłady

Przykład: Zderzenie przeciwbieżnych wiązek cząstek:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + 2p_1p_2 + p_2^2 \approx 2p_1p_2 = 2(E_1E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \approx 4E_1E_2$$

HERA $e(27.5$ GeV$) + p(920$ GeV$)$: $\sqrt{s} \approx 318$ GeV,

LHC $p(7$ TeV$) + p(7$ TeV$)$: $\sqrt{s} = 14$ TeV.

Gdyby zderzenie zachodziło ze stacjonarną tarczą, wówczas:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + 2p_1p_2 + p_2^2 \approx 2p_1p_2 = 2(E_1M_2 - 0) = 2E_1M$$

Aby energia dostępna w CMS była taka jak w eksperymencie z przeciwbieżnymi wiązkami, musielibyśmy mieć:

HERA $(e + p)$: $E_e \approx 53.9$ TeV,

LHC $(p + p)$: $E_p \approx 104.5$ TeV.

Przykład: Jaka jest energia i pęd cząstki 2 w układzie spoczynkowym cząstki 1 jeśli obie cząstki powstają w wyniku rozpadu $M \to m_1 + m_2$?

$$M^2 = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1p_2 \quad \Rightarrow \quad p_1p_2 = \frac{1}{2}(M^2 - m_1^2 - m_2^2)$$

$$E_{21} = \frac{p_1p_2}{m_1} = \frac{1}{2m_1}(M^2 - m_1^2 - m_2^2), \qquad |\vec{p}_{21}|^2 = \frac{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}{m_1^2}$$

Transformacje Lorentza do układu spoczynkowego cząstki

Gdy wzajemna prędkość układów S i S' ma dowolny kierunek, ogólne TL mają postać:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\beta}\gamma\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\,\vec{r}\cdot\vec{\beta} - t\right), \qquad t' = \gamma\left(t - \vec{r}\cdot\vec{\beta}\right)$$

W zastosowaniu do czteropędu, transformacje te przyjmują postać:

$$\vec{p}' = \vec{p} + \vec{\beta}\gamma\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\,\vec{p}\cdot\vec{\beta} - E\right), \qquad E' = \gamma\left(E - \vec{p}\cdot\vec{\beta}\right)$$

Aby przejść do układu spoczynkowego cząstki o czteropędzie $P = (E_s, \vec{p_s})$ i masie $P^2 = M^2$, wystarczy zastosować powyższe transformacje dla

$$\beta = \frac{\vec{p_s}}{E_s} \qquad \text{oraz} \qquad \gamma = \frac{E_s}{M}$$

Przykład: Transformacja do CMS: $P = p_1 + p_2 = (E_1 + E_2, \vec{p_1} + \vec{p_2}) \equiv (E, \vec{p})$.

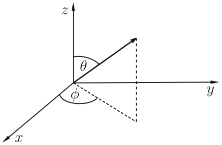
$$\vec{p_1}^\star = \vec{p_1} + \frac{\vec{p}}{M}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{p_1}}{E+M} - E_1\right) \qquad E_1^\star = \frac{1}{M}\left(E\,E_1 - \vec{p}\cdot\vec{p_1}\right) = \frac{P p_1}{M}$$

$$\vec{p_2}^\star = \vec{p_2} + \frac{\vec{p}}{M}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{p_2}}{E+M} - E_2\right) \qquad E_2^\star = \frac{1}{M}\left(E\,E_2 - \vec{p}\cdot\vec{p_2}\right) = \frac{P p_2}{M}$$

W szczególności mamy: $\vec{p_1}^\star + \vec{p_2}^\star = \vec{p} + \frac{\vec{p}}{M}\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{E+M} - E\right) = 0.$

Transformacja kątów

Niech układ CMS ($S^\star$) porusza się z prędkością β względem układu LAB (S_{LAB}) wzdłuż wspólnej osi z:



$$\begin{aligned} E^\star &= \gamma(E^{\text{L}} - \beta p_z^{\text{L}}) \\ p_z^\star &= \gamma(p_z^{\text{L}} - \beta E^{\text{L}}), \quad p_x^\star = p_x^{\text{L}}, \quad p_y^\star = p_y^{\text{L}} \end{aligned}$$

Zapisując pędy we współrzędnych sferycznych mamy:

$$\begin{aligned} E^\star &= \gamma(E^{\text{L}} - \beta p^{\text{L}} \cos\theta^{\text{L}}) \\ p^\star \sin\theta^\star \cos\phi^\star &= p^{\text{L}} \sin\theta^{\text{L}} \cos\phi^{\text{L}} \\ p^\star \sin\theta^\star \sin\phi^\star &= p^{\text{L}} \sin\theta^{\text{L}} \sin\phi^{\text{L}} \\ p^\star \cos\theta^\star &= \gamma(p^{\text{L}} \cos\theta^{\text{L}} - \beta E^{\text{L}}) \end{aligned}$$

Skąd otrzymujemy: $\operatorname{tg}\phi^{\text{L}} = \operatorname{tg}\phi^\star \quad \Rightarrow \quad \phi^{\text{L}} = \phi^\star$ oraz

$$\operatorname{ctg}\theta^\star = \gamma\left(\operatorname{ctg}\theta^{\text{L}} - \frac{r^{\text{L}}}{\sin\theta^{\text{L}}}\right), \quad \text{gdzie} \quad r^{\text{L}} = \frac{\beta}{B^{\text{L}}}$$

gdzie B^{L} to czynnik β cząstki w układzie LAB.
Stosując odwrotne TL można pokazać, że

$$\operatorname{ctg}\theta^{\text{L}} = \gamma\left(\operatorname{ctg}\theta^\star + \frac{r^\star}{\sin\theta^\star}\right), \quad \text{gdzie} \quad r^\star = \frac{\beta}{B^\star}$$