ALGORYTMY GRAFOWE

dr hab. Mariusz Meszka

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

http://home.agh.edu.pl/~meszka

Program wykładu

1. Maksymalne przepływy w sieciach.
2. Inne zagadnienia przepływowe: sieci z dolnym ograniczeniem przepływu, przepływy o minimalnym koszcie, przepływy uogólnione.
3. Skojarzenia w grafach.
4. Grafy planarne – testowanie planarności oraz znajdowanie planarnej reprezentacji.
5. Kolorowanie wierzchołkowe oraz krawędziowe.
6. Pokrycie wierzchołkowe, dominowanie, kliki i zbiory niezależne.
7. Grafy przekątniowe i przedziałowe – rozpoznawanie.
8. Podziały i dekompozycje grafów.

Literatura

[1] S. Even, Graph Algorithms 2nd Edition, Cambridge University Press 2011.
[2] W.L. Kocay, D.L. Kreher, Graphs, Algorithms and Optimization 2nd Edition, CRC Press 2017.
[3] K. Erciyes, Guide to Graph Algorithms: Sequential, Parallel and Distributed, Springer 2018.
[4] D. Williamson, Network Flow Algorithms, Cambridge University Press 2019.

Siecią $G = (V, A, s, t, c)$ nazywamy graf skierowany (V, A), w którym dwa wierzchołki s, t (nazywane odpowiednio *źródłem* i *ujściem*) są wyróżnione, a c jest funkcją przepustowości

$$c: \ A \mapsto \mathbb{R}_+.$$

Przepływem w sieci G nazywamy funkcję

$$f: \ A \mapsto \mathbb{R}_+$$

spełniającą warunki:
(1) $\forall (u,v) \in A: \quad 0 \leqslant f(u,v) \leqslant c(u,v)$
(2) $\forall v \in V \setminus \{s,t\}:$

$$\sum_{u \in V:\ (u,v) \in A} f(u,v) = \sum_{u \in V:\ (v,u) \in A} f(v,u).$$

Wartością przepływu f jest liczba
$|f| = \sum_{(s,u)\in A} f(s,u) = \sum_{(u,t)\in A} f(u,t)$.

Problem maksymalnego przepływu

Wejście: Sieć $G = (V, A, s, t, c)$
Wyjście: Przepływ f_{max} :

$$|f_{max}| = \max\{|f| : f \text{ jest przepływem w } G\}.$$

Siecią residualną dla sieci $G = (V, A, s, t, c)$ oraz przepływu f nazywamy sieć $G_f = (V, A_f, s, t, c_f)$, w której
$A_f = A \cup \{(u, v) : \; f(v, u) > 0\}$ oraz:

$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{jeśli } (u, v) \in A \\ f(v, u) & \text{wpp} \end{cases}$$

Ścieżką powiększającą dla przepływu f jest ścieżka od s do t w sieci residualnej G_f.

Niech p będzię ścieżką powiększającą dla przepływu f.
Przepustowość residualna ścieżki p wynosi
$c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : \; (u, v) \in p\}$.

Metoda Forda-Fulkersona

for każdy łuk $(u, v) \in A$ **do**
    $f(u, v) := 0$
$G_f := G$
while istnieje ścieżka powiększająca p w G_f **do**
    $c_f(p) := \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$
    for każdy łuk $(u, v) \in p$ **do**
        $f(u, v) := f(u, v) + c_f(p)$
        $c_f(u, v) := c(u, v) - f(u, v)$
        $c_f(v, u) := f(u, v)$

Jeśli c jest funkcją całkowitoliczbową to $T = O(|A||c|)$.

Algorytm Edmondsa-Karpa

Do znajdowania ścieżek powiększających w metodzie Forda-Fulkersona wykorzystawane jest przeszukiwanie wszerz (BFS).

$T = O(|V||A|^2)$

Przekrojem w sieci $G = (V, A, s, t, c)$ nazywamy taki podział (S, T) zbioru V, w którym $s \in S$ oraz $t \in T$.

Przepustowość przekroju
$c(S, T) = \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \in T} c(u, v)$
Przepływ przez przekrój
$f(S, T) = \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \in T} f(u, v)$

Twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju

Niech f będzie przepływem w sieci $G = (V, A, s, t, c)$.
Następujące warunki są równoważne.
(1) Przepływ f w G jest maksymalny
(2) Sieć residualna G_f nie zawiera ścieżki powiększającej
(3) Istnieje przekrój (S, T), dla którego zachodzi $|f| = c(S, T)$.

Przedprzepływem w sieci G nazywamy funkcję

$$g:\ A \mapsto \mathbb{R}_+$$

spełniającą warunki:
(1) $\forall (u,v) \in A: \quad 0 \leqslant g(u,v) \leqslant c(u,v)$
(2) $\forall v \in V \setminus \{s,t\}:$

$$\sum_{u \in V:\ (u,v) \in A} g(u,v) - \sum_{u \in V:\ (v,u) \in A} g(v,u) \geqslant 0.$$

Nadmiarem w wierzchołku v nazywamy liczbę

$$e(v) = \sum_{u \in V:\ (u,v) \in A} g(u,v) - \sum_{u \in V:\ (v,u) \in A} g(v,u).$$

Wierzchołek $v \in V \setminus \{s,t\}$ jest *nadmiarowy* jeśli $e(v) > 0$.

Funkcję $h: \ V \mapsto \mathbb{N}$ nazywamy *funkcją wysokości* jeśli
(1) $h(s) = |V|$
(2) $h(t) = 0$
(3) $\forall (u, v) \in A_g : \quad h(u) \leqslant h(v) + 1.$

Operacja prześlij(u, v) może zostać wykonana, gdy spełnione są warunki:
(1) $e(u) > 0$
(2) $c_g(u, v) > 0$
(3) $h(u) = h(v) + 1$

prześlij(u, v)

$d_g(u, v) := \min\{e(u), c_g(u, v)\}$
if $(u, v) \in A$ **then**
    $g(u, v) := g(u, v) + d_g(u, v)$
else
    $g(u, v) := g(u, v) - d_g(u, v)$
$e(u) := e(u) - d_g(u, v)$
$e(v) := e(v) + d_g(u, v)$

Operacja podnieś(u) może zostać wykonana, gdy spełnione są warunki:
(1) $e(u) > 0$
(2) $\forall (u, v) \in A_g : \quad h(u) \leqslant h(v)$.

podnieś(u)

$h(u) := 1 + \min\{h(v) : \ (u, v) \in A_g\}$

inicjuj_przedprzepływ(G)

for każdy wierzchołek $v \in V$
    $h(v) := 0$
    $e(v) := 0$
for każdy łuk $(u, v) \in A$
    $g(u, v) := 0$
$h(s) := |V|$
for każdy łuk $(s, v) \in A$
    $g(s, v) := c(s, v)$
    $e(v) := c(s, v)$
    $e(s) := e(s) - c(s, v)$

Algorytm przedprzepływowy

inicjuj_przedprzepływ(G)
while można zastosować prześlij lub podnieś
    wybierz jedną z dopuszczalnych i wykonaj

$$T = O(|V|^2|A|)$$

Warianty zagadnienia przepływowego

1. Sieci z wieloma źródłami i ujściami.
2. Sieci z dolną przepustowością.
3. Przepływ rozszerzony.
4. Przepływ o minimalnym koszcie.
5. Sieci uogólnione.

Sieć z wieloma źródłami i ujściami

to sieć postaci $G_{ST} = (V, A, S, T, c)$, gdzie (V, A) jest grafem skierowanym, w którym S jest zbiorem źródeł, T jest zbiorem ujść, a c jest funkcją przepustowości

$$c : \; A \mapsto \mathbb{R}_+.$$

Przepływem w sieci G_{ST} nazywamy funkcję

$$f : \; A \mapsto \mathbb{R}_+$$

spełniającą warunki:
(1) $\forall (u, v) \in A : \quad 0 \leqslant f(u, v) \leqslant c(u, v)$
(2) $\forall v \in V \setminus (S \cup T) :$

$$\sum_{u \in V:\, (u,v) \in A} f(u, v) = \sum_{u \in V:\, (v,u) \in A} f(v, u).$$

Wartością przepływu f jest
$|f| = \sum_{(u,v)\in A,\, u\in S} f(u,v) = \sum_{(u,v)\in A,\, v\in T} f(u,v)$.

Problem maksymalnego przepływu w G_{ST}

Wejście: Sieć $G_{ST} = (V, A, S, T, c)$.
Wyjście: Przepływ f_{max} :
$|f_{max}| = \max\{|f| : \ f \text{ jest przepływem w } G_{ST}\}$.

Siecią pomocniczą dla $G_{ST} = (V, A, S, T, c)$ jest sieć
$G' = (V', A', s', t', c')$, w której:
$V' = V \cup \{s', t'\}$
$A' = A \cup \{(s', s) : \text{dla każdego } s \in S\} \cup \{(t, t') : \text{dla każdego } t \in T\}$

$$c'(u,v) = \begin{cases} c(u,v) & \text{jeśli } (u,v) \in A \\ \infty & \text{wpp} \end{cases}$$

Sieć z dolną przepustowością

to sieć postaci $G_b = (V, A, s, t, b, c)$, gdzie (V, A) jest grafem skierowanym, s jest źródłem, t ujściem, a b i c są odpowiednio funkcjami dolnej i górnej przepustowości

$$b, c: \ A \mapsto \mathbb{R}_+.$$

Przepływem (*dopuszczalnym*) w sieci G_b nazywamy funkcję

$$f: \ A \mapsto \mathbb{R}_+$$

spełniającą warunki:
(1) $\forall (u,v) \in A: \quad b(u,v) \leqslant f(u,v) \leqslant c(u,v)$
(2) $\forall v \in V \setminus \{s,t\}:$

$$\sum_{u \in V:\ (u,v) \in A} f(u,v) = \sum_{u \in V:\ (v,u) \in A} f(v,u).$$

Problem maksymalnego przepływu w G_b

Wejście: Sieć $G_b = (V, A, s, t, b, c)$.
Wyjście: Przepływ f_{max} :
$|f_{max}| = \max\{|f| : f$ jest przepływem w $G_b\}$, lub NULL jeśli f nie istnieje.

Warunki konieczne na istnienie przepływu dopuszczalnego

$$\forall v \in V \setminus \{s, t\} : \sum_{u \in V} b(u, v) \leqslant \sum_{u \in V} c(v, u)$$

$$\forall v \in V \setminus \{s, t\} : \sum_{u \in V} b(v, u) \leqslant \sum_{u \in V} c(u, v)$$

Siecią pomocniczą dla sieci G_b jest sieć $G' = (V', A', s', t', c')$, w której:

$$V' = V \cup \{s', t'\}$$

$$\begin{aligned} A' = A \cup \{(s', v) : \text{dla każdego } v \in V \setminus s\} \\ \cup \{(v, t') : \text{dla każdego } v \in V \setminus t\} \cup (t, s) \end{aligned}$$

$$c'(u,v) = \begin{cases} \sum_{w \in V} b(w,v) & \text{jeśli } u = s' \\ \sum_{w \in V} b(u,w) & \text{jeśli } v = t' \\ c(u,v) - b(u,v) & \text{jeśli } (u,v) \in A \\ \infty & \text{dla } (t,s) \end{cases}$$

Twierdzenie

Sieć G_b posiada przepływ dopuszczalny wtedy i tylko wtedy, gdy maksymalny przepływ w sieci pomocniczej G' jest równy $|f'| = \sum_{v \in V} c'(s', v) = \sum_{v \in V} c'(v, t')$.

Maksymalny przepływ w G_b

if znajdź_przepływ_dopuszczalny()==0 **then**
    return NULL
for każdy łuk $(u, v) \in A$ **do**
    $f(u, v) := f'(u, v) + b(u, v)$
    $c_f(u, v) := c(u, v) - f(u, v)$
    $c_f(v, u) := f(u, v) - b(u, v)$
while istnieje ścieżka powiększająca p w G_f **do**
    $c_f(p) := \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$
    for każdy łuk $(u, v) \in p$ **do**
        $f(u, v) := f(u, v) + c_f(p)$
        $c_f(u, v) := c(u, v) - f(u, v)$
        $c_f(v, u) := f(u, v) - b(u, v)$

Przepływem (*rozszerzonym*) w sieci G_b nazywamy funkcję

$$f: A \mapsto \mathbb{R}_+$$

spełniającą warunki:
(1) $\forall (u,v) \in A: \quad b(u,v) \leqslant f(u,v) \leqslant c(u,v)$ lub $f(u,v) = 0$
(2) $\forall v \in V \setminus \{s,t\}:$

$$\sum_{u \in V:\,(u,v) \in A} f(u,v) = \sum_{u \in V:\,(v,u) \in A} f(v,u).$$

Problem maksymalnego przepływu rozszerzonego w G_b

Wejście: Sieć $G_b = (V, A, s, t, b, c)$.
Wyjście: Przepływ f_{max} :
$|f_{max}| = \max\{|f| : f$ jest przepływem rozszerzonym w $G_b\}$, lub NULL jeśli f nie istnieje.

Kosztem w sieci $G = (V, A, s, t, c)$ nazywamy funkcję $k : A \mapsto \mathbb{R}^+$.

Niech f będzie przepływem w sieci G. *Kosztem przepływu* f jest wartość

$$k_f = \sum_{(u,v) \in A} f(u, v) k(u, v).$$

Problem przepływu o minimalnym koszcie w G

Wejście: Sieć $G = (V, A, s, t, c)$ wraz z funkcją kosztu k, oraz $d \in R_+$.
Wyjście: Przepływ $f_{mink} : k_{f_{mink}} = \min\{k_f : f$ jest przepływem w G i $|f| = d\}$.

Twierdzenie

Przepływ f w G jest przepływem o minimalnym koszcie wtedy i tylko wtedy, gdy w sieci residualnej G_f nie istnieje cykl o ujemnym koszcie.

Przepływ o minimalnym koszcie w G

f := znajdź_przepływ(d)
G_f := sieć residualna dla f w G
while istnieje w G_f cykl C o koszcie ujemnym **do**
    modyfikuj f wzdłuż cyklu C
    modyfikuj G_f

Sieć uogólniona

to sieć postaci $G_g = (V, A, s, t, c, \gamma)$, gdzie (V, A) jest grafem skierowanym, s jest źródłem, t ujściem, c funkcją przepustowości, natomiast γ jest *funkcją zysku* (straty)
$\gamma: \ A \mapsto \mathbb{R}^+$.

Przepływem uogólnionym w sieci G_g nazywamy funkcję
$f: \ A \mapsto \mathbb{R}_+$ spełniającą warunki:
(1) $\forall (u,v) \in A: \quad 0 \leqslant f(u,v) \leqslant c(u,v)$
(2) $\forall v \in V \setminus \{s,t\}:$

$$\sum_{u \in V:\ (v,u) \in A} f(v,u) = \sum_{u \in V:\ (u,v) \in A} f(u,v)\gamma(u,v).$$

Wartością przepływu f jest liczba
$|f| = \sum_{(u,t) \in A} f(u,t)\gamma(u,t)$.

Problem przepływu maksymalnego w sieci G_g

Wejście: Sieć $G_g = (V, A, s, t, c, \gamma)$.
Wyjście: Przepływ f_{max} :
$|f_{max}| = \max\{|f| : f$ jest przepływem w $G_g\}$.

Cykl C nazywamy *cyklem generującym przepływ* jeśli $\gamma(C) = \prod_{(u,v)\in C} \gamma(u,v) > 1$. Jeśli $\gamma(C) < 1$ to wówczas mówimy o *cyklu absorbującym przepływ*. Gdy $\gamma(C) = 1$ to cykl jest *jednostkowy*.

Uogólnioną ścieżką powiększającą (GAP) nazywamy cykl C generujący przepływ, wraz z dołączoną (dopuszczalnie pustą) ścieżką P od jednego z wierzchołków cyklu C do ujścia t w sieci residualnej G_f.

Twierdzenie

Przepływ f jest przepływem maksymalnym w G_g wtedy i tylko wtedy, gdy w sieci residualnej G_f nie istnieje uogólniona ścieżka powiększająca.

Przepływ maksymalny w G_g

$f := 0$
$G_f := G_g$
while istnieje w G_f uogólniona ścieżka powiększająca CP **do**
    modyfikuj f wzdłuż CP
    modyfikuj G_f

Problem minimalnego przekroju w grafie

Wejście: Graf $G = (V, E)$ oraz funkcja wagowa $w: E \mapsto \mathbb{R}_+$
Wyjście: Przekrój (X, Y):

$$w(X, Y) = \min\{w(X', Y') : (X', Y') \text{ jest przekrojem w } G\}.$$

$w(X, Y) = \sum_{\{x,y\} \in E:\, x \in X,\, y \in Y} w(\{x, y\})$

Niech $A \subset V$. Jeśli $v \notin A$ to $w(A, v) = \sum_{\{a,v\} \in E:\, a \in A} w(\{a, v\})$.
Wierzchołek $z \notin A$ nazywamy *najsilniej połączonym z A* jeśli $w(A, z) = \max\{w(A, v) : v \notin A\}$.

redukuj(G, v_0)

$A := \{v_0\}$
while $A \neq V$ **do**
    dołącz do A wierzchołek najsilniej połączony
$(X, Y) := (t, V \setminus \{t\})$
złącz w G dwa ostatnio dołączone do A wierzchołki s i t
return (X, Y)

Algorytm Stoera-Wagnera

$w_{min} := w(v_0, V \setminus \{v_0\})$
while $|V| > 1$ **do**
    (X, Y)=redukuj(G, v_0)
    if $w(X, Y) < w_{min}$ **then**
        $(X, Y)_{min} := (X, Y)$
        $w_{min} := w(X, Y)$
return $(X, Y)_{min}$, w_{min}

$T = \Theta(|V||E| + |V|^2 \log|V|)$.

Lemat

Niech s i t będą dwoma wierzchołkami w grafie $G = (V, E)$. Niech $G/\{s, t\}$ oznacza graf otrzymany z G poprzez złączenie wierzchołków s i t. Wówczas minimalnym przekrojem w G jest albo przekrój (S, T) albo minimalny przekrój w grafie $G/\{s, t\}$.

Lemat

Przekrój zwracany przez funkcję redukuj() jest minimalnym (S, T)-przekrojem zadanego na wejściu grafu G, gdzie s i t są ostatnimi dołączonymi wierzchołkami.

Skojarzeniem w grafie $G = (V, E)$ nazywamy podzbiór $M \subset E$ wierzchołkowo rozłącznych krawędzi.

Licznością skojarzenia M jest liczba $|M|$.

Mówimy, że M jest *najliczniejszym* skojarzeniem w G jeśli $|M| = \max\{|M'| : \ M' \text{ jest skojarzeniem w } G\}$. Wówczas liczbę $\mu(G) = |M|$ nazywamy *liczbą skojarzeniową* grafu G.

Problem najliczniejszego skojarzenia w grafie

Wejście: Graf $G = (V, E)$.
Wyjście: Najliczniejsze skojarzenie M w G.

Skojarzenie M w grafie $G = (V, E)$ nazywamy *pełnym* jeśli $|M| = |V|/2$.

Twierdzenie Tutte'a

Graf G posiada pełne skojarzenie wtedy i tylko wtedy, gdy $|S| \geqslant c$ dla każdego podzbioru $S \subset V$, gdzie c oznacza liczbę spójnych składowych o nieparzystym rzędzie w grafie $G[V \setminus S]$.

Twierdzenie Halla'a

Graf dwudzielny $G(X, Y; E)$ zawiera skojarzenie rozmiaru $|X|$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podzbioru $S \subset X$ zachodzi $|S| \leqslant |N(S)|$.

Siecią pomocniczą dla grafu dwudzielnego $G = (X, Y; E)$ jest sieć $G = (V, A, s, t, c)$, w której:
$V = X \cup Y \cup \{s, t\}$
$A = \{(x, y) : \text{dla każdego } \{x, y\} \in E\} \cup \{(s, x) : \text{dla każdego } x \in X\} \cup \{(y, t) : \text{dla każdego } Y \in Y\}$
$c(u, v) = 1$ dla każdego łuku $(u, v) \in A$.

Twierdzenie

Graf dwudzielny $G = (X, Y; E)$ zawiera skojarzenie o liczności $|M|$ jeżeli istnieje przepływ f o wartości $|f| = |M|$ w sieci pomocniczej $G = (V, A, s, t, c)$.

Ścieżka $P =< v_0, v_1, \dots, v_k >$ o nieparzystej długości k jest *ścieżką powiększającą* względem skojarzenia M w grafie G jeśli $\forall l: \ 1 \leqslant l \leqslant \frac{k-1}{2} : \{v_{2l-1}, v_{2l}\} \in M$, a wierzchołki v_0 oraz v_k są *wolne* (czyli nie są incydentne z żadną krawędzią skojarzenia M).

Twierdzenie Berge'a

M jest najliczniejszym skojarzeniem w grafie G wtedy i tylko wtedy, gdy G nie zawiera ścieżki powiększającej względem M.

Kielich to cykl o nieparzystej długości $2k+1$, w którym k krawędzi należy do skojarzenia M.
Podstawą kielicha jest albo wierzchołek wolny, albo skojarzony z krawędzią z M nie należącą do kielicha.

Zwinięciem kielicha B do podstawy y nazywamy taką transformację grafu $G=(V,E)$ do grafu $G'=(V',E')$, że
$V' = V \setminus (V(B) \setminus \{y\})$, oraz
$E' = E \setminus \{\{u,v\}:\ u \in V(B) \text{ lub } v \in V(B)\} \cup$
$\{\{y,v\}:\ \{u,v\} \in E,\ u \in V(B),\ v \notin V(B)\}$.
Operację odwrotną nazywamy *rozwinięciem kielicha B*.

Niech S oznacza zbiór wierzchołków wolnych względem skojarzenia M. *Lasem naprzemiennym* nazywamy las F, w którym:
- każdy wierzchołek ze zbioru S jest korzeniem w F
- każda krawędź o nieparzystej odległości od korzenia należy do M.

Każdy wierzchołek w F mający nieparzystą odległość od korzenia ma stopień 2 i nazywany jest wierzchołkiem *wewnętrznym*. Pozostałe wierzchołki są *zewnętrzne*.

Algorytm Edmondsa

$M := \emptyset$
$F := V(G)$
while (1) **do**
    if istnieje zewnętrzny wierzchołek $x \in F$ sąsiedni z $y \notin F$ **then**
        znajdź wierzchołek z: $\{y, z\} \in M$
        $F \cup \{x, y\} \cup \{y, z\}$
    else
    if istnieją zewnętrzne wierzchołki $x_1, x_2 \in F : \{x_1, x_2\} \in E$ **then**
        if x_1 oraz x_2 należą do różnych składowych w F **then**
            $p_1 :=$ ścieżka od $root(x_1)$ do x_1 w F
            $p_2 :=$ ścieżka od $root(x_2)$ do x_2 w F
            modyfikuj M wzdłuż ścieżki powiększającej $p_1 \cup \{x_1, x_2\} \cup p_2$
            $F :=$ zbiór wierzchołków wolnych względem M
        else
            $B :=$ kielich zamknięty przez $\{x_1, x_2\}$ o podstawie y
            zwiń B do y
            modyfikuj M względem B
    else
        break
for każdy zwinięty kielich B **do**
    rozwiń B
    modyfikuj M względem B

$T = O(|V|^2|E|)$

Warianty zagadnienia

1. Pełne skojarzenie o minimalnej wadze.
2. Pełne skojarzenie o maksymalnej wadze.
3. Skojarzenie o maksymalnej wadze.

Problem pełnego skojarzenia o minimalnej wadze

Wejście: Graf dwudzielny pełny zrównoważony $G(X, Y; E)$ oraz
funkcja kosztu $w: E \mapsto \mathbb{R}^+$.

Wyjście: Pełne skojarzenie M o minimalnej wadze
$w_{min} = \min\{w(M) : M \text{ jest skojarzeniem pełnym w } G\}$.

Etykietowanie $l : X \cup Y \mapsto \mathbb{Z}$ nazywamy *dopuszczalnym* jeśli $l(x) + l(y) \leqslant w(x, y)$ dla każdych $x \in X, \ y \in Y$.

Dla dopuszczalnego etykietowania l, pograf $G_l = (X, Y; E_l)$ grafu G, w którym $E_l = \{xy : \ l(x) + l(y) = w(x, y)\}$ nazywamy *grafem nasycenia*.

Twierdzenie

Niech l będzie dopuszczalnym etykietowaniem grafu G.
Jeśli M jest pełnym skojarzeniem w G_l, wówczas M jest pełnym skojarzeniem o minimalnej wadze w G.

Mówimy, że wierzchołek z jest *osiągalny* z x jeśli istnieje naprzemienna ścieżka $x - z$ w G_l.

skoryguj_etykietowanie

$x :=$ wierzchołek wolny względem M w X
$S :=$ wierzchołki w X osiągalne z x
$T :=$ wierzchołki w Y osiągalne z x
$\alpha := \min_{x \in S, y \in Y \setminus T} \{w(x, y) - l(x) - l(y)\}$
for każdy wierzchołek $x \in S$
    $l(x) := l(x) + \alpha$
for każdy wierzchołek $y \in T$
    $l(y) := l(y) - \alpha$

Algorytm Kuhna-Munkresa

$M := \emptyset$
for każdy wierzchołek $x \in X$
    $l(x) := \min_{y \in Y}\{w(x,y)\}$
for każdy wierzchołek $y \in Y$
    $l(y) := 0$
wyznacz G_l
while M nie jest skojarzeniem pełnym w G
    if istnieje ścieżka powiększająca P względem M w G_l **then**
        modyfikuj M wzdłuż ścieżki P
    else
        skoryguj_etykietowanie
        modyfikuj G_l

$T = O(|V|^3)$