# MATEMATYKA DYSKRETNA

dr hab. Mariusz Meszka

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

http://home.agh.edu.pl/∼meszka

## Program wykładu

1. Zbiory, podzbiory i multizbiory. Generowanie podzbiorów.
2. Funkcje i rozmieszczenia. Permutacje. Metody generowania permutacji.
3. Zasada pudełkowania i przykłady jej zastosowań.
4. Zasada włączania-wyłączania. Nieporządki.
5. Podziały zbioru i liczby. Liczby Stirlinga.
6. Zależności rekurencyjne. Rozwiązywanie liniowych równań rekurencyjnych o stałych współczynnikach.
7. Funkcje tworzące; przykłady wykorzystania.
8. Zliczanie obiektów kombinatorycznych.

## Program wykładu (cd.)

9. Pojęcia wstępne teorii grafów. Izomorfizm grafów. Spójność.
10. Droga Eulera. Cykle i ścieżki Hamiltona.
11. Grafy dwudzielne. Drzewa. Grafy planarne.
12. Kolorowanie wierzchołków i krawędzi w grafach. Zawężenie zagadnień kolorowania do poznanych rodzin grafów.
13. Przykłady dekompozycji grafów.

## Literatura

[1] W. Lipski, Kombinatoryka dla programistów, WNT 2007.
[2] J. Jaworski, Z. Palka, J. Szymański, Matematyka dyskretna dla informatyków, WN UAM, 2011.
[3] R.A. Brualdi, Introductory combinatorics 5th Edition, Prentice Hall 2010.
[4] R.P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics 5th Edition, Pearson 2004.

### Lemat

Liczba wszystkich podzbiorów zbioru $n$-elementowego wynosi $2^n$.

### Lemat

Liczba wszystkich podzbiorów $k$-elementowych zbioru $n$-elementowego wynosi $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

### Lemat

Prawdziwe są następujące zależności:

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}$

$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$

$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2 \binom{n+2k-i}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$

### Twierdzenie dwumienne

Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

W szczególności, dla $x = y = 1$,

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.$$

**Lemat**

Liczba $k$-elementowych podzbiorów z powtórzeniami zbioru $S$, który zawiera $n$ różnych elementów, każdy o nieograniczonej krotności, wynosi $\binom{n+k-1}{k}$.

## Twierdzenie wielomienne

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1; n_2; \ldots; n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_t^{n_t},$$

gdzie sumowanie przeprowadzone jest po wszystkich nieujemnych całkowitoliczbowych rozwiązaniach równania

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_t = n,$$

oraz

$$\binom{n}{n_1; n_2; \ldots; n_t} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_t!}.$$

## Generowanie wszystkich podzbiorów zbioru $n$-elementowego

generuj_podzbiory($n, p$)
  **if** $p == n$ **then**
    **for** $i := 0$ **to** $n - 1$ **do**
      **if** (ciag[$i$] $== 1$) **then**
        wypisz($i$)
  **else**
    ciag[$p$] $:= 0$
    generuj_podzbiory($n, p + 1$)
    ciag[$p$] $:= 1$
    generuj_podzbiory($n, p + 1$)

Start rekurencji od wywołania:
  generuj_podzbiory($n, 0$)

## Generowanie podzbiorów $k$-elementowych zbioru $n$-elementowego

```
 for i := 0 to k − 1 do
    zbior[i] := i + 1
do
    wypisz_zbior()
    if (zbior[k − 1] < n) then
        j := k − 1
    else
        j := k − 2
        while (j >= 0 && zbior[j] + 1 == zbior[j + 1]) do
            j − −
    if (j >= 0) then
        zbior[j] + +
        for i := j + 1 to k − 1 do
            zbior[i] := zbior[i − 1] + 1
while (j >= 0)
```

## Generowanie podzbiorów $k$-elementowych z powtórzeniami

**for** $i := 0$ **to** $k-1$ **do**

  $\text{zbior}[i] := \cancel{i+}\,1$

**do**

  wypisz_zbior()

  **if** $(\text{zbior}[k-1] < n)$ **then**

    $j := k-1$

  **else**

    $j := k-2$

    **while** $(j >= 0\ \&\&\ \text{zbior}[j]\ \cancel{+1} == \text{zbior}[j+1])$ **do**

      $j--$

  **if** $(j >= 0)$ **then**

    $\text{zbior}[j]++$

    **for** $i := j+1$ **to** $k-1$ **do**

      $\text{zbior}[i] := \text{zbior}[i-1]\ \cancel{+1}$

**while** $(j >= 0)$

**Lemat**

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, to liczba wszystkich funkcji $f : X \mapsto Y$ wynosi $m^n$.

**Lemat**

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, $m \geqslant n$, to liczba wszystkich funkcji różnowartościowych $f : X \mapsto Y$ wynosi $\frac{m!}{(m-n)!}$.

**Lemat**

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, $m \geqslant n$, to liczba wszystkich funkcji rosnących $f : X \mapsto Y$ wynosi $\binom{m}{n}$.

**Lemat**

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, to liczba wszystkich funkcji niemalejących $f : X \mapsto Y$ wynosi $\binom{m+n-1}{n}$.

### Wniosek

Jeśli $|X| = |Y| = n$, to każda funkcja różnowartościowa $f: X \mapsto Y$ jest wzajemnie jednoznaczna (bijektywna). Wówczas liczba takich funkcji jest równa $n!$.

### Definicja

Odwzorowanie bijektywne $f: X \mapsto X$ nazywamy *permutacją* zbioru $X$.

### Wniosek

Liczba wszystkich permutacji zbioru $n$-elementowego wynosi $n!$.

Zbiór wszystkich permutacji zbioru $n$-elementowego oznaczamy symbolem $S_n$.

Permutację $f : X \mapsto X$ zapisujemy

$$f = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots & x_n \\ f(x_1), & f(x_2), & \dots & f(x_n) \end{pmatrix}$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $X = \{1, 2, \dots, n\}$.
Wówczas

$$f =< f(1), f(2), \dots, f(n) > .$$

### Definicja

Niech $f, g \in S_n$. *Złożeniem permutacji* $f$ i $g$ nazywamy permutację $g \circ f$ zdefiniowaną następująco

$$\forall i \in X : \ (g \circ f)(i) = g(f(i)).$$

### Definicja

Permutację $e =< 1, 2, \ldots, n >$ nazywamy *identycznościową*.

### Wniosek

Dla dowolnej permutacji $f \in S_n$ zachodzi $f \circ e = e \circ f = f$.

### Definicja

Każda permutacja $f \in S_n$ wyznacza jednoznacznie taką permutację $f^{-1} \in S_n$, że $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$. $f^{-1}$ nazywamy permutacją *odwrotną* do $f$.

## Lemat

Dla dowolnych permutacji $f, g, h \in S_n$ spełnione są warunki:
(1) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
(2) $f \circ e = e \circ f = f$
(3) $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$.
Stąd wynika, że $(S_n, \circ)$ jest grupą, nazywaną *grupą symetryczną* stopnia $n$.

### Definicja

*Cyklem* długości $k$ nazywamy permutację $f_k = (x_1^k \, x_2^k \, \dots x_k^k)$, w której $f_k(x_1^k) = x_2^k$, $f_k(x_2^k) = x_3^k$, $f_k(x_{k-1}^k) = x_k^k$, $f_k(x_k^k) = x_1^k$, oraz $f_k(x) = x$ dla każdego $x \in X \setminus \{x_1^k, x_2^k, \dots, x_k^k\}$.

### Lemat

Każdą permutację można przedstawić jednoznacznie w postaci złożenia (niezależnych) cykli. Przedstawienie takie nazywamy *rozkładem na cykle*.

### Definicja

Mówimy, że permutacja $f$ jest *typu* $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ jeśli w rozkładzie na cykle zawiera dokładnie $\lambda_i$ cykli długości $i$, dla $i = 1, 2, \dots, n$.
Do zapisu typu stosujemy zwykle notację $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$ (pomijając $i^{\lambda_i}$ jeśli $\lambda_i = 0$).

**Lemat**

Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ będzie multizbiorem o mocy $n$, który zawiera $t$ parami różnych elementów; każdy element $x_i$ ma krotność $n_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Wtedy $\sum_{i=1}^{t} n_i = n$.
Liczba wszystkich permutacji multizbioru $X$ wynosi

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}.$$

## Generowanie permutacji zbioru $n$-elementowego

```
for i := 0 to n − 1 do
    perm[i] := i + 1
do
    wypisz_permutacje()
    i := n − 2
    while (i >= 0 && perm[i] > perm[i + 1]) do
        i − −
    if (i >= 0) then
        j := n − 1
        while perm[j] < perm[i]) do
            j − −
        perm[i] :=: perm[j]
        k := i + 1
        l := n − 1
        while l > k do
            perm[k] :=: perm[l]
            k + +
            l − −
while (i >= 0)
```

## Zasada pudełkowania (Dirichleta)

Jeśli $n+1$ obiektów zostanie rozmieszczonych w $n$ pudełkach, to wśród tych pudełek znajdzie się takie, które zawiera co najmniej 2 obiekty.

## Uogólniona zasada pudełkowania

Niech $q_1, q_2, \ldots, q_n$ będą liczbami naturalnymi. Jeśli $q_1 + q_2 + \ldots + q_n + 1$ obiektów zostanie rozmieszczonych w $n$ pudełkach, to znajdzie się pudełko o takim indeksie $i$, że zawiera ono $q_i + 1$ obiektów.

Niech $X$ będzie danym zbiorem $n$-elementowym.
Niech $P_1, P_2, \ldots, P_t$ oznaczają pewne własności elementów z $X$.
Niech $A_i = \{x : x \in X \text{ oraz } x \text{ ma własność } P_i\}, \ 1 \leqslant i \leqslant t$.

**Twierdzenie**

Liczba elementów zbioru $X$ posiadających co najmniej jedną z własności $P_1, P_2, \ldots, P_t$ wynosi:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_t| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant t} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant t} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant t} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{t+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_t|.$$

### Wniosek

Liczba elementów zbioru $X$ nieposiadających żadnej z własności $P_1, P_2, \ldots, P_t$ wynosi:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_t}| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_t| =$$

$$|X| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant t} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant t} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant t} |A_i \cap A_j \cap A_k| +$$

$$+ \ldots + (-1)^t |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_t|.$$

### Definicja

Permutację $f$ nazywamy *nieporządkiem* jeśli, dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$, $f(i) \neq i$.

### Twierdzenie

Niech $D_n$ oznacza liczbę nieporządków zbioru $n$-elementowego $X$. Wówczas

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

### Lemat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!} = e^{-1} \approx 0,368.$$

### Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, $n \geqslant m$, to liczba wszystkich odwzorowań suriektywnych $f: X \mapsto Y$ wynosi:

$$m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \binom{m}{3}(m-3)^n + \ldots$$

$$+(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}1^n.$$

### Definicja

Przez *podział* $n$-elementowego zbioru $X$ na $k$ bloków rozumiemy taką rodzinę $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ podzbiorów zbioru $X$, że $B_i \neq \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ oraz $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = X$, dla każdych $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

### Definicja

Liczbę podziałów zbioru $n$-elementowego na $k$ bloków nazywamy *liczbą Stirlinga drugiego rodzaju* i oznaczamy $S(n, k)$.

### Lemat

Dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju zachodzi zależność

$$\begin{array}{ll} S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k) & \text{dla} \quad 0 < k < n \\ S(n,n) = 1 & \text{dla} \quad n \geqslant 0 \\ S(n,0) = 0 & \text{dla} \quad n > 0 \end{array}$$

### Definicja

Liczbę podziałów zbioru $n$-elementowego nazywamy *liczbą Bella* i oznaczamy symbolem $B(n)$.

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

### Lemat

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B(i)$$

## Generowanie wszystkich podziałów zbioru

generuj_bloki($p, l$)
  **if** $p == n$ **then**
    wypisz_blok()
    **return**
  **for** $i := 1$ **to** $l + 1$ **do**
    blok[$p$] $:= i$
    **if** $i < l + 1$ **then**
      generuj_bloki($p + 1, l$)
    **else**
      generuj_bloki($p + 1, l + 1$)

Start rekurencji od wywołania:
  generuj_bloki$(0, 0)$

## Generowanie podziałów zbioru na $k$ bloków

```
generuj_bloki(p, l)
    if p == n then
        wypisz_blok()
        return
    for i := 1 to l + 1 do
        blok[p] := i
        if i < l + 1 then
            generuj_bloki(p + 1, l)
        else
            generuj_bloki(p + 1, l + 1)                    if l + 1 <= k
then
                generuj_bloki(p + 1, l + 1)                    if
n − 1 − p >= k − l then
                generuj_bloki(p + 1, l)
        else
            if l + 1 <= k then
                generuj_bloki(p + 1, l + 1)
```

## Definicja

*Podziałem* liczby $n$ na $k$ składników nazywamy taki ciąg liczb naturalnych $< b_1, b_2, \ldots, b_k >$, że $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_k > 0$ oraz $b_1 + b_2 + \ldots + b_k = n$.

Niech $P(n, k)$ oznacza liczbę podziałów liczby $n$ na $k$ składników, natomiast $P(n)$ liczbę wszystkich podziałów.

$$P(n) = \sum_{k=0}^{n} P(n, k)$$

$$P(0, 0) = P(0) = 1$$

**Lemat**

Liczba podziałów liczby $n$ na $k$ składników jest równa liczbie tych podziałów liczby $n$, w których największy składnik ma wartość $k$.

$$
\begin{aligned}
P(n,k) &= 0 \quad \text{dla} \quad n < k \\
P(n,n) &= 1 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 0 \\
P(n,0) &= 0 \quad \text{dla} \quad n > 0
\end{aligned}
$$

**Lemat**

Dla $n \geqslant k \geqslant 0$ zachodzi zależność

$$P(n,k) = \sum_{i=0}^{k} P(n-k, i)$$

## Generowanie podziałów liczby $n$

podział[0] := $n$
$k := 1$
wypisz_podział(k)
**while** podział[0] $> 1$ **do**
    $p := k - 1$
    **while** podział[$p$] $== 1$ **do**
        $p - -$
    podział[$p$] $- -$
    $s := k - p$
    **while** $s > 0$ **do**
        **if** $s >=$podział[$p$] **then**
            podział[$p + 1$] := podział[$p$]
        **else**
            podział[$p + 1$] := $s$
        $s := s-$ podział[$p + 1$]
        $p + +$
    $k := p + 1$
    wypisz_podział(k)

## Definicja

*Liczbę Stirlinga pierwszego rodzaju* oznaczamy symbolem $s(n, k)$ i definiujemy jako liczbę tych permutacji zbioru $n$-elementowego, które w rozkładzie na cykle posiadają $k$ cykli.

## Lemat

Dla liczb Stirlinga pierwszego rodzaju zachodzi zależność

$$\begin{array}{lll} s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)\cdot s(n-1,k) & \text{dla} & 0 < k < n \\ s(n,n) = 1 & \text{dla} & n \geqslant 0 \\ s(n,0) = 0 & \text{dla} & n > 0 \end{array}$$

## Definicja

Niech $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem liczb. Mówimy, że spełnia on *liniowe równanie rekurencyjne* stopnia $k$ jeśli istnieją współczynniki $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ $(a_k \neq 0)$:

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \ldots + a_k h_{n-k} + b, \ (n \geqslant k),$$

gdzie każdy ze współczynników $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ może zależeć od $n$.

Ciąg liczb $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ spełniających powyższe równanie jest jednoznacznie wyznaczony przez liczby $h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}$ nazywane *wartościami początkowymi*.

Liniowe równanie rekurencyjne jest *homogeniczne*, jeśli $b = 0$.

Liniowe równanie rekurencyjne ma *stałe współczynniki*, jeśli każdy ze współczynników $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jest stałą.

**Twierdzenie**

Niech $q$ będzie niezerową stałą.
Wówczas $h_n = q^n$ jest rozwiązaniem homogenicznego równania rekurencyjnego liniowego o stałych współczynnikach:

$$h_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \ldots - a_k h_{n-k} = 0, \ (a_k \neq 0, \ n \geqslant k),$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $q$ jest pierwiastkiem wielomianu:

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} \ldots - a_k = 0.$$

Wielomian ten nazywany jest *wielomianem charakterystycznym*, a wszystkie jego pierwiastki *pierwiastkami charakterystycznymi*.

Jeśli wielomian charakterystyczny ma $k$ różnych pierwiastków $q_1, q_2, \ldots, q_k$, wtedy

$$h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_k q_k^n$$

stanowi ogólną postać rozwiązania.

Dla każdego wyboru wartości początkowych $h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}$ istnieją jednoznacznie określone stałe $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Jeśli $q_i$ jest pierwiastkiem $s_i$-krotnym wielomianu charakterystycznego, to wówczas każda z wartości $h_n = q_i^n$, $h_n = nq_i^n$, $h_n = n^2 q_i^n, \ldots, h_n = n^{s_i - 1} q_i^n$
jest rozwiązaniem równania, a stąd

$$h_n^{(i)} = c_1 q_i^n + c_2 n q_i^n + \ldots + c_{s_i} n^{s_i - 1} q_i^n$$

jest rozwiązaniem dla pierwiastka $q_i$,
przy każdym wyborze współczynników $c_1, c_2, \ldots c_{s_i}$.

Niech $q_1, q_2, \ldots, q_t$ będą różnymi pierwiastkami, o krotnościach odpowiednio $s_1, s_2, \ldots s_t$.
Ogólna postać rozwiązania homogenicznego równania rekurencyjnego liniowego o stałych współczynnikach:

$$h_n = h_n^{(1)} + h_n^{(2)} + \ldots + h_n^{(t)}.$$

W celu rozwiązania niehomogenicznego równania rekurencyjnego liniowego o stałych współczynnikach wykonujemy następujące kroki:
(1) znajdujemy rozwiązanie ogólne odpowiedniego równania homogenicznego
(2) znajdujemy rozwiązanie szczególne równania niehomogenicznego
(3) łączymy oba rozwiązania z wykorzystaniem wartości początkowych.

Wykonanie kroku (2) wymaga próby wykorzystania różnych form rozwiązania szczególnego $h_n$ w zależności od postaci czynnika niehomogenicznego $b$. W szczególności:
(i) gdy $b$ jest wielomianem stopnia $k$ to za testowane rozwiązanie szczególne $h_n$ przyjmujemy również wielomian stopnia $k$,
(ii) gdy $b = sp^n$ to próbujemy wykorzystać $h_n = tp^n$.

Powodzenie w wykonaniu kroku (2) zależy od postaci wielomianu charakterystycznego.

**Definicja**

Nieskończonemu ciągowi $a_0, a_1, a_2, \ldots$ może zostać przypisany szereg formalny

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Wówczas $A(x)$ oznacza *funkcję tworzącą* (*zwyczajną*) dla tego ciągu.

Jeśli $a_k = 0$ dla każdego $k > n$, to wtedy szereg utożsamiamy z wielomianem $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$.

**Lemat**

Każdy ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ wyznacza jednoznacznie funkcję tworzącą $A(x)$. Każda funkcja $A(x)$ określa jednoznacznie ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

### Definicja

*Funkcją tworzącą eksponencjalną* nieskończonego ciągu $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jest szereg formalny

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}.$$

### Lemat

Każdy ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ wyznacza jednoznacznie funkcję tworzącą eksponencjalną $B(x)$. Każda funkcja $B(x)$ określa jednoznacznie ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

**Twierdzenie**

Niech $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem liczb spełniającym homogeniczne równanie rekurencyjne liniowe stopnia $k$ o stałych współczynnikach

$$h_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \ldots - a_k h_{n-k} = 0, \ (a_k \neq 0, \ n \geqslant k).$$

Wówczas funkcja tworząca dla tego równania ma postać $H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $Q(x)$ jest wielomianem stopnia $k$ o niezerowym współczynniku stałym, natomiast $P(x)$ jest wielomianem stopnia mniejszego niż $k$.

Niech $G$ będzie grupą permutacji zbioru $X = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Niech $\mathcal{C}$ będzie zbiorem wszystkich pokolorowań zbioru $X$.
Niech $f \in G$ oraz $c \in \mathcal{C}$.
Niech $f^*$ oznacza permutację indukowaną przez $f$, działającą na zbiorze kolorów.
Wtedy $f^*(c(x)) = c(f(x))$ dla każdego $x \in X$, czyli $f^* \circ c = c \circ f$.
Mówimy wówczas, że grupa $G$ działa na zbiorze pokolorowań $\mathcal{C}$.

**Definicja**

Niech $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ będą dwoma różnymi pokolorowaniami. Mówimy, że $c_1 \sim c_2$ (są *równoważne*) jeśli $c_2 = c_1 \circ f = f^* \circ c_1$ dla pewnej permutacji $f \in G$.

**Lemat**

Relacja $\sim$ jest relacją równoważności.

Niech $G(c) = \{f : \ f \in G, \ c \circ f = c\}$.
Niech $\mathcal{C}(f) = \{c : \ c \in \mathcal{C}, \ c \circ f = c\}$.

### Definicja

Zbiór $G(c)$ nazywamy *stabilizatorem* kolorowania $c$.

### Lemat

Dla każdego kolorowania $c \in \mathcal{C}$ stabilizator $G(c)$ tworzy grupę. Ponadto, dla dowolnych $f, g \in G$, $c \circ g = c \circ f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1} \circ g \in G(c)$.

### Lemat

Niech $c \in \mathcal{C}$. Liczba $|\{c \circ f : \ f \in G\}|$ pokolorowań równoważnych do $c$ jest równa
$$\frac{|G|}{|G(c)|}.$$

### Twierdzenie

Niech $G$ będzie grupą permutacji zbioru $X$, a $\mathcal{C}$ zbiorem wszystkich takich pokolorowań, że $c \circ f \in \mathcal{C}$ dla każdego $f \in G$ oraz każdego $c \in \mathcal{C}$. Wówczas liczba $N(G, \mathcal{C})$ wszystkich nierównoważnych pokolorowań w $\mathcal{C}$ jest dana wzorem

$$N(G, \mathcal{C}) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} |C(f)|.$$

Niech $\lambda(f)$ oznacza liczbę cykli w rozkładzie permutacji $f$ na cykle.

**Twierdzenie**

Niech $f \in G$ oraz niech $k$ oznacza liczbę kolorów przypisanych elementom z $X$ dla pewnego $c \in \mathcal{C}$. Wówczas $|C(f)| = k^{\lambda(f)}$.

Niech $f \in G$. Załóżmy, że $f$ jest typu $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.
Wówczas $\sum_{i=1}^{n} i\lambda_i = n$ oraz $\lambda(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.
Niech $z_1, z_2, \ldots, z_n$ będą niezmiennikami,
$z_i$ odpowiada cyklowi długości $i$.
Każdej permutacji $f$ typu $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ przypisany jest monomian $\mathrm{mon}(f) = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \cdots z_n^{\lambda_n}$, którego stopień wynosi $\lambda(f)$.
Wówczas

$$\sum_{f \in G} mon(f) = \sum_{f \in G} z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \cdots z_n^{\lambda_n}$$

jest funkcją tworzącą typów permutacji w $G$.
Współczynnik przy danym $z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \cdots z_n^{\lambda_n}$ oznacza liczbę permutacji typu $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

### Definicja

*Cyklicznym indeksem* grupy $G$ nazywamy liczbę

$$P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \cdots z_n^{\lambda_n}.$$

### Twierdzenie

Niech $G$ będzie grupą permutacji $n$-elementowego zbioru $X$, a $\mathcal{C}$ zbiorem wszystkich $k^n$ pokolorowań elementów w $X$ za pomocą $k$ kolorów. Liczba $N(G, \mathcal{C})$ wszystkich nierównoważnych pokolorowań w $\mathcal{C}$ jest równa

$$N(G, \mathcal{C}) = P_G(k, k, \ldots, k).$$

### Twierdzenie

Niech $G$ będzie grupą permutacji $n$-elementowego zbioru $X$. Niech $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ będzie zbiorem $k$ kolorów, a $\mathcal{C}$ zbiorem wszystkich pokolorowań elementów w $X$ za pomocą kolorów z $U$. Wówczas funkcja tworząca dla liczby nierównoważnych pokolorowań w zależności od dystrybucji kolorów ma postać

$$P_G(u_1 + u_2 + \cdots + u_k, u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_k^2, \ldots, u_1^n + u_2^n + \cdots + u_k^n),$$

a współczynnik przy $u_1^{p_1} u_2^{p_2} \cdots u_k^{p_k}$ oznacza liczbę nierównoważnych pokolorowań, w których $p_i$ elementów zbioru $X$ pokolorowanych jest kolorem $u_i$, dla każdego $i = 1, 2, \ldots k$.

### Definicja

*Grafem* nazywamy parę $G = (V, E)$, w której $V$ oznacza skończony zbiór *wierzchołków*, natomiast $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$ jest zbiorem *krawędzi*.

*Rzędem* grafu $G = (V, E)$ jest liczba $n = |V|$, natomiast *rozmiarem* $m = |E|$.

**Definicja**

*Grafem skierowanym* (*digrafem*) nazywamy parę $G = (V, A)$, w której $V$ oznacza skończony zbiór *wierzchołków*, natomiast $A \subseteq \{(u, v) : \ u, v \in V\}$ jest zbiorem *łuków*.

**Definicja**

*Multigrafem* nazywamy parę $G = (V, E)$, w której $V$ oznacza skończony zbiór *wierzchołków*, natomiast $E \subseteq \{\{u, v\} : \ u, v \in V\}$ jest multizbiorem *krawędzi*.

**Definicja**

*Hipergrafem* nazywamy parę $G = (V, \mathcal{E})$, w której $V$ oznacza skończony zbiór *wierzchołków*, natomiast $\mathcal{E} \subseteq \{e : \ e \subset V\}$ jest zbiorem *hiperkrawędzi*.

### Definicja

*Stopniem* wierzchołka $v$ w grafie $G = (V, E)$ nazywamy liczbę $d(v) = |\{\{v, u\} \in E : \ u \in V\}|$.
*Stopniem maksymalnym* w grafie $G = (V, E)$ (*stopniem grafu*) nazywamy liczbę $\Delta(G) = max\{d(v) : \ v \in V\}$.
*Stopniem minimalnym* w $G = (V, E)$ jest liczba $\delta(G) = min\{d(v) : \ v \in V\}$.

### Lemat

Suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie jest liczbą parzystą.
Liczba wierzchołków stopnia nieparzystego w grafie jest parzysta.

### Definicja

*Spacerem* w grafie $G = (V, E)$ nazywamy ciąg wierzchołków $< v_0, v_1, \ldots, v_k >$ o takiej własności, że dla każdego $1 \leqslant i \leqslant k$ $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$.
*Droga* to spacer nie zawierający powtarzających się krawędzi.
*Ścieżka* to droga nie zawierająca powtarzających się wierzchołków.
Mówimy, że spacer jest *zamknięty* jeśli $\{v_k, v_0\} \in E$.
W przeciwnym przypadku spacer jest *otwarty*.
Zamkniętą ścieżkę nazywamy *cyklem*.

### Definicja

Liczbę krawędzi w spacerze $< v_0, v_1, \ldots, v_k >$ (otwartym lub zamkniętym) nazywamy jego długością.

### Definicja

Mówimy, że graf $G = (V, E)$ jest *spójny*, jeśli dla każdej pary wierzchołków $u, v \in V$ istnieje ścieżka o wierzchołkach końcowych $u$ i $v$.
W przeciwnym przypadku graf jest *niespójny*.

### Definicja

*Odległością* $d(u, v)$ wierzchołków $u$ i $v$ w grafie $G = (V, E)$ nazywamy minimalną długość ścieżki z $u$ do $v$.
*Średnica* grafu $G = (V, E)$ to liczba
$\mathrm{diam}(G) = max\{d(u, v) : \; u, v \in V\}$.

### Lemat

Niech $\delta(G) \geqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
Wówczas $G$ jest grafem spójnym.

**Definicja**

Graf $G' = (V', E')$ nazywamy *podgrafem* grafu $G = (V, E)$, jeśli $V' \subset V$ oraz $E' \subset E$.
Jeśli $G'$ zawiera każdą krawędź grafu $G$, której oba wierzchołki końcowe są w $V'$, to $G'$ jest podgrafem *indukowanym* przez $V$.
Jeśli $V' = V$ to $G'$ jest podgrafem *spinającym*.

**Lemat**

W każdym grafie $G = (V, E)$ zbiór $V$ jest jednoznacznie rozkładalny na takie podzbiory $V_1, V_2, \ldots, V_k$ $(V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k = V,\ V_i \cap V_j = \emptyset$ jeśli $i \neq j)$, że każdy podgraf indukowany przez $V_i$ jest spójny oraz, dla każdego $i \neq j$, $u \in V_i$, $v \in V_j$, nie istnieje ścieżka o końcach $u$ i $v$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

**Definicja**

Podgrafy indukowane przez $V_1, V_2, \ldots, V_k$ nazywamy *spójnymi składowymi* grafu $G$.

## Definicja

Mówimy, że grafy $G = (V, E)$ oraz $G' = (V', E')$ są *izomorficzne*, jeśli istnieje taka bijekcja $\varphi : \ V \mapsto V'$, że

$$\{x, y\} \in E \ \ \Leftrightarrow \ \ \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E'.$$

| $n$ | grafy poetykietowane | grafy nieizomorficzne |
|---|---:|---:|
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 8 | 4 |
| 4 | 64 | 11 |
| 5 | 1 024 | 34 |
| 6 | 32 768 | 156 |
| 7 | 2 097 152 | 1 044 |
| 8 | 268 435 456 | 12 346 |
| 9 | 68 719 476 736 | 274 668 |
| 10 | 35 184 372 088 832 | 12 005 168 |
| 11 | 36 028 797 018 963 968 | 1 018 997 864 |

### Definicja

*Dopełnieniem* grafu $G = (V, E)$ jest graf $\overline{G} = (V, \overline{E})$, w którym $E \cap \overline{E} = \emptyset$ oraz $E \cup \overline{E} = E(K_n)$.

### Definicja

Graf izomorficzny ze swoim dopełnieniem nazywamy *samodopełniającym*.

**Definicja**

*Drogą Eulera (zamkniętą)* w spójnym multigrafie $G = (V, E)$ nazywamy drogę zamkniętą zawierającą każdą krawędź ze zbioru $E$.

**Twierdzenie**

Multigraf spójny $G = (V, E)$ posiada zamkniętą drogę Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka w $G$ jest parzysty.

## Znajdowanie drogi Eulera

$D := \emptyset$
$v = v_0$
**for** każda krawędź $\{v, u\}$ w $G$ **do**
    odwiedzona[$\{v, u\}$] := 0
**do**
    **if** istnieje nieodwiedzona krawędź $\{v, u\}$ incydentna do $v$ **then**
        połóż_na_stos($\{v, u\}$)
        odwiedzona[$\{v, u\}$] := 1
    **else**
        $\{v, u\}$ := zdejmij_ze_stosu()
        $D := D \cup \{v, u\}$
    $v := u$
**while** stos_niepusty()
**return** $D$

### Definicja

*Otwartą drogą Eulera* w spójnym multigrafie $G = (V, E)$ nazywamy drogę otwartą zawierającą każdą krawędź ze zbioru $E$.

### Twierdzenie

Multigraf spójny $G = (V, E)$ posiada otwartą drogę Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie dwa wierzchołki w $G$ mają stopnie nieparzyste.

## Problem chińskiego listonosza

Wejście: Graf spójny $G = (V, E)$ oraz funkcja kosztu $w : E \mapsto \mathbb{R}^+$.
Wyjście: Zamknięty spacer $D$ o minimalnej wadze $w(D)$ zawierający każdą krawędź z $E$.

### Definicja

Graf $G = (V, E)$ jest *dwudzielny*, jeśli istnieje taki podział $(X, Y)$ zbioru $V$ ($X \cup Y = V$, $X \cap Y = \emptyset$), że każda krawędź w $G$ ma jeden wierzchołek końcowy w $X$ a drugi w $Y$.

### Lemat

Graf $G$ jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy cykl w $G$ ma parzystą długość.

### Definicja

*Drzewem* nazywamy graf spójny acykliczny.
*Lasem* nazywamy graf acykliczny.
*Liść* w lesie to wierzchołek stopnia 1.

### Lemat

Rozmiar drzewa rzędu $n$ wynosi $n-1$.

### Lemat

Liczba liści $l$ w drzewie rzędu $n$ spełnia $0 \leqslant l \leqslant n$. Liczba liści $l$ w drzewie rzędu $n \geqslant 3$ spełnia $2 \leqslant l \leqslant n-1$.

### Lemat

W drzewie każda para wierzchołków połączona jest dokładnie jedną ścieżką.

### Definicja

Cykl zawierający każdy wierzchołek grafu $G = (V, E)$ nazywamy *cyklem Hamiltona*.
Graf $G$ posiadający cykl Hamiltona jest *grafem hamiltonowskim*.

### Definicja

Ścieżkę zawierającą każdy wierzchołek grafu $G = (V, E)$ nazywamy *ścieżką Hamiltona*.
Graf $G$ posiadający ścieżkę Hamiltona jest *trasowalny*.

### Twierdzenie

Niech $n \geqslant 3$. Jeśli $\delta(G) \geqslant \frac{n}{2}$ to $G$ jest hamiltonowski.

### Twierdzenie

Niech $G$ będzie grafem, w którym, dla każdej pary niesąsiednich wierzchołków $u$ i $v$, zachodzi warunek $d(u) + d(v) \geqslant n$.
Wtedy $G$ jest hamiltonowski.

## Problem komiwojażera

Wejście: Graf pełny $K_n = (V, E)$ oraz funkcja kosztu $w : E \mapsto \mathbb{R}^+$.
Wyjście: Cykl Hamiltona o minimalnej wadze.

### Definicja

*Skojarzeniem* w grafie $G = (V, E)$ nazywamy podzbiór $M \subset E$ wierzchołkowo rozłącznych krawędzi.
*Licznością* skojarzenia $M$ jest liczba $|M|$.

Skojarzenie $M$ w grafie $G = (V, E)$ nazywamy *pełnym* jeśli $|M| = \frac{n}{2}$, a *niemal pełnym* jeśli $|M| = \frac{n-1}{2}$.

**Lemat**

Graf $G = (V, E)$ o parzystym rzędzie, w którym $\delta(G) \geqslant \frac{n}{2}$, posiada pełne skojarzenie.

**Twierdzenie**

Graf $G$ posiada pełne skojarzenie wtedy i tylko wtedy, gdy $|S| \geqslant c$ dla każdego podzbioru $S \subset V$, gdzie $c$ oznacza liczbę spójnych składowych o nieparzystym rzędzie w grafie $G[V \setminus S]$.

**Twierdzenie**

Graf dwudzielny $G(X, Y; E)$ zawiera skojarzenie rozmiaru $|X|$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $S \subset X$ zachodzi $|S| \leqslant |N(S)|$.

Mówimy, że $M$ jest *najliczniejszym* skojarzeniem w $G$ jeśli $|M| = \max\{|M'| : M' \text{ jest skojarzeniem w } G\}$. Wówczas liczbę $\mu(G) = |M|$ nazywamy *liczbą skojarzeniową* grafu $G$.

Ścieżka $P =< v_0, v_1, \ldots, v_k >$ o nieparzystej długości $k$ jest *ścieżką powiększającą* względem skojarzenia $M$ w grafie $G$ jeśli dla każdego $l$ spełniającego $1 \leqslant l \leqslant \frac{k-1}{2}$ zachodzi $\{v_{2l-1}, v_{2l}\} \in M$, a wierzchołki $v_0$ oraz $v_k$ są *wolne* (czyli nie są incydentne z żadną krawędzią skojarzenia $M$).

**Twierdzenie**

$M$ jest najliczniejszym skojarzeniem w grafie $G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G$ nie zawiera ścieżki powiększającej względem $M$.

### Definicja

Przez *płaską reprezentację* grafu $G = (V, E)$ rozumiemy takie rozmieszczenie wierzchołków zbioru $V$ na płaszczyźnie (sferze), że jedyny punkt przecięcia dowolnych dwóch krawędzi to ewentualnie ich wspólny koniec.

### Definicja

Graf nazywamy *planarnym* jeśli posiada płaską reprezentację.

### Definicja

Reprezentacja płaska grafu rozdziela jednoznacznie powierzchnię sfery na regiony zwane *ścianami*.

**Lemat**

Niech $f$ oznacza liczbę ścian w płaskiej reprezentacji spójnego grafu $G = (V, E)$. Wówczas $n - m + f = 2$.

**Lemat**

W każdym grafie planarnym $G = (V, E)$ rzędu $n \geqslant 3$ zachodzi zależność $m \leqslant 3n - 6$.

**Lemat**

Każdy graf planarny $G = (V, E)$ zawiera wierzchołek stopnia co najwyżej 5.

## Definicja

*Rozdzieleniem krawędzi* $\{u, v\}$ w grafie $G = (V, E)$ nazywamy dodanie nowego wierzchołka $w$ oraz zastąpienie tej krawędzi przez dwie krawędzie $\{u, w\}$ i $\{w, v\}$.
*Rozdzieleniem grafu* $G$ nazywamy graf $G'$ powstały z $G$ poprzez wykonanie kolejnych rozdzieleń krawędzi.

## Twierdzenie Kuratowskiego

Graf $G$ jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu będącego rozdzieleniem grafu $K_5$ lub $K_{3,3}$.

*Zwinięciem krawędzi* $\{u, v\}$ w grafie $G = (V, E)$ nazywamy operację złączenienia wierzchołków $u$ oraz $v$ wraz z usunięciem powstałej pętli oraz zastąpienia potencjalnych równoległych krawędzi przez pojedynczą krawędź.
*Minorem grafu* $G$ nazywamy graf $G'$ powstały z $G$ poprzez wykonanie kolejnych operacji usuwania wierzchołków, usuwania krawędzi oraz/lub zwijania krawędzi.

**Twierdzenie Wagnera**

Graf $G$ jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada minorów będących $K_5$ lub $K_{3,3}$.

## Definicja

*Zbiorem niezależnym* w grafie $G = (V, E)$ nazywamy taki podzbiór $I \subset V$, że żadne dwa wierzchołki w $I$ nie są sąsiednie.

Mówimy, że zbiór niezależny $I$ w grafie $G$ jest *najliczniejszy*, jeśli nie istnieje inny zbiór niezależny w $G$ o rzędzie większym niż $|I|$. Wówczas $\alpha(G) = |I|$ nazywamy *liczbą niezależności* grafu $G$.

### Definicja

*Kliką* w grafie $G = (V, E)$ nazywamy taki podzbiór $Q \subset V$, że każde dwa wierzchołki w $Q$ są sąsiednie.

Mówimy, że klika $Q$ w grafie $G$ jest *najliczniejsza*, jeśli nie istnieje klika w $G$ rzędu większego niż $|Q|$.
Wówczas $\omega(G) = |Q|$ nazywamy *liczbą klikową* grafu $G$.

### Lemat

W każdym grafie $G$ zachodzi $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

## Definicja

*Kolorowaniem* (wierzchołkowym) grafu $G = (V, E)$ nazywamy odwzorowanie $c : V \mapsto C$, gdzie $C$ oznacza zbiór kolorów.
Jeśli dla każdych dwóch sąsiednich wierzchołków $v, u$ zachodzi $c(v) \neq c(u)$, to kolorowanie nazywamy *właściwym*.

Jeśli $|C| = k$ to mówimy o *$k$-kolorowaniu*.
Minimalną liczbę $k$, dla której istnieje $k$-kolorowanie właściwe wierzchołków grafu $G$ nazywamy *liczbą chromatyczną* grafu $G$ i oznaczamy $\chi(G)$.

Zbiór wierzchołków pokolorowanych tym samym kolorem nazywamy *klasą kolorową*.
Każda klasa kolorowa jest zbiorem niezależnym.

**Lemat**

Dla każdego grafu $G$ zachodzi $1 \leqslant \chi(G) \leqslant n$.

**Lemat**

Niech $G$ będzie grafem, w którym $\Delta(G) \geqslant 1$. Wówczas $\chi(G) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G$ jest grafem dwudzielnym.

**Lemat**

W każdym grafie $G$ zachodzą zależności:

$$\chi(G) \geqslant \omega(G)$$

$$\chi(G) \geqslant \lceil \frac{n}{\alpha(G)} \rceil$$

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$$

### Twierdzenie Brooks'a

Dla każdego grafu $G$ zachodzi

$$\chi(G) \begin{cases} = & \Delta(G)+1 \quad \text{gdy } G = K_n \text{ lub } G = C_{2p+1} \\ \leqslant & \Delta(G) \quad \text{wpp} \end{cases}$$

### Twierdzenie

Jeśli $G$ jest grafem planarnym, to $\chi(G) \leqslant 4$.

### Twierdzenie

Jeśli $G$ jest grafem planarnym nie zawierającym trójkątów, to $\chi(G) \leqslant 3$.

### Definicja

Graf $G = (V, E)$ jest *r-cyrkularnie kolorowalny* jeśli istnieje takie odwzorowanie $c' : V \mapsto [0, r)$, że $\forall \{x, y\} \in E : 1 \leqslant |c'(x) - c'(y)| \leqslant r - 1$.
*Cyrkularna liczbą chromatyczna* grafu $G$, oznaczona $\chi_c(G)$, wynosi: $\chi_c(G) = \inf\{r : G \text{ jest } r\text{-cyrkularnie kolorowalny}\}$.

### Twierdzenie

Dla każdego grafu $G$ zachodzi $\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leqslant \chi(G)$.

## Definicja

*Krawędziowym k-kolorowaniem* (właściwym) grafu $G = (V, E)$ nazywamy takie odwzorowanie $c : E \mapsto C$, gdzie $C$ oznacza zbiór kolorów oraz $|C| = k$, że dla każdych dwóch incydentnych krawędzi $e_1, e_2$ zachodzi $c(e_1) \neq c(e_2)$.

Minimalną liczbę $k$, dla której istnieje właściwe $k$-kolorowanie krawędzi grafu $G$ nazywamy *indeksem chromatycznym* grafu $G$ i oznaczamy $\chi'(G)$.

Zbiór krawędzi pokolorowanych tym samym kolorem nazywamy *klasą kolorową*.
Każda klasa kolorowa jest skojarzeniem.

**Lemat**

Dla każdego grafu $G$ spełniona jest zależność $\chi'(G) \leqslant 2\Delta(G) - 1$.

**Twierdzenie**

Jeśli $G$ jest grafem dwudzielnym, to $\chi'(G) = \Delta(G)$.

**Twierdzenie**

W dowolnym grafie $G$ zachodzi $\chi'(G) \leqslant \lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \rfloor$.

**Twierdzenie**

Dla każdego grafu $G$ zachodzi $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

### Definicja

*Dekompozycją* grafu $G = (V, E)$ nazywamy rodzinę jego krawędziowo rozłącznych podgrafów $G_1, G_2, \ldots, G_t$ o takiej własności, że każda krawędź grafu $G$ jest zawarta w dokładnie jednym z tych podgrafów.
Jeśli każdy $G_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$, jest izomorficzny z grafem $H$, to mówimy wówczas o *$H$-dekompozycji* grafu $G$.

### Lemat

Jeśli istnieje $H$-dekompozycja grafu $G$, to $|E(G)|$ jest podzielne przez $|E(H)|$.

**Twierdzenie**

Graf pełny $K_n$ posiada $M_k$-dekompozycję na skojarzenia rozmiaru $k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \leqslant k \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ oraz $k | \binom{n}{2}$.

**Twierdzenie**

Graf pełny $K_n$ posiada $P_{k+1}$-dekompozycję na ścieżki długości $k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \leqslant k \leqslant n-1$ oraz $k | \binom{n}{2}$.

**Twierdzenie**

Graf pełny $K_n$ posiada $C_k$-dekompozycję na cykle długości $k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $3 \leqslant k \leqslant n$, $k | \binom{n}{2}$ oraz $n$ jest nieparzyste.

**Hipoteza**

Graf pełny $K_{2n+1}$ posiada $T_{n+1}$-dekompozycję dla każdego drzewa $T_{n+1}$ rzędu $n+1$.

### Definicja

*Kwadratem łacińskim* rzędu $n$ (o boku $n$) nazywamy tablicę rozmiaru $n \times n$, w której każda komórka zawiera element ze zbioru $S$ rzędu $n$ w taki sposób, że każdy symbol z $S$ występuje dokładnie raz w każdym wierszu i dokładnie raz w każdej kolumnie kwadratu.

### Definicja

Dwa kwadraty łacińskie, $L$ i $L'$, rzędu $n$ są *ortogonalne*, jeśli wszystkie spośród $n^2$ par $(L(i,j), L'(i,j))$ są parami różne.

### Twierdzenie

Dla każdego $n \geqslant 1$, $n \neq 2, 6$, istnieje para ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu $n$.

### Definicja

Mówimy, że w zbiorze $L_1, L_2, \ldots, L_m$ kwadraty łacińskie rzędu $n$ są *wzajemnie ortogonalne* (ozn. MOLS($n$)), jeśli dla każdych $1 \leqslant i < j \leqslant m$, $L_i$ oraz $L_j$ są ortogonalne. Niech $N(n)$ oznacza maksymalną liczbę kwadratów w zbiorze MOLS($n$).

### Lemat

Dla każdego $n$ zachodzi $1 \leqslant N(n) \leqslant n - 1$.

### Twierdzenie

Jeśli $q = p^k$ jest potęgą liczby pierwszej, wówczas $N(q) = q - 1$.

**Definicja**

*Częściowym kwadratem łacińskim* rzędu $n$ nazywamy tablicę rozmiaru $n \times n$,, w której każda komórka jest albo pusta albo zawiera element ze zbioru $S$ w taki sposób, że każdy symbol z $S$ występuje co najwyżej raz w każdym wierszu i co najwyżej raz w każdej kolumnie.

**Twierdzenie**

Częściowy kwadrat łaciński rzędu $n$, w którym co najwyżej $n-1$ komórek jest niepustych, może zostać uzupełniony do kwadratu łacińskiego rzędu $n$.

## Definicja

Niech $a$, $b$ i $n$ będą liczbami naturalnymi spełniającymi zależność $a \times b = n$. Wówczas tablica rozmiaru $n \times n$ może zostać podzielona na rozłączne *bloki*, każdy z nich będący podtablicą rozmiaru $a \times b$. $(a, b)$-*kwadratem Sudoku* nazywamy kwadrat łaciński nad zbiorem symboli $\{1, 2, \ldots, n\}$, w którym każdy blok zawiera wszystkie symbole z $S$.

## Definicja

$(a, b)$-*zbiorem krytycznym Sudoku* nazywamy częściowy kwadrat łaciński $P$, który może zostać uzupełniony w sposób jednoznaczny do $(a, b)$-kwadratu Sudoku, a ponadto usunięcie jakiegokolwiek niepustej komórki z $P$ zaburza jdnoznaczność tego uzupełnienia.

## Lemat

Dla każdego $k$, $17 \leqslant k \leqslant 35$, istnieje (3,3)-zbiór krytyczny Sudoku posiadający $k$ niepustych komórek.

| typ | liczba kwadratów Sudoku |
|---|---|
| $(1,1)$ | 1 |
| $(2,2)$ | 288 |
| $(3,3)$ | 6 670 903 752 021 072 936 960 |

## Definicja

*Systemem trójek Steinera*, STS($v$), rzędu $v$ nazywamy taką parę $(V, \mathcal{B})$, w której $V$ jest skończonym zbiorem *punktów*, $|V| = v$, oraz $\mathcal{B}$ jest rodziną 3-elementowych pozdbiorów zbioru $V$ nazywanych *trójkami* o takiej własności, że każdy 2-elementowy pozdbiorów zbioru $V$ jest zawarty w dokładnie jednej trójce.

Warunek konieczny na istnienie STS($v$): $v \equiv 1, 3 \pmod 6$.

## Twierdzenie

System trójek Steinera rzędu $v$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $v \equiv 1, 3 \pmod 6$.

**Definicja**

Dwa systemy trójek Steinera, $(V_1, \mathcal{B}_1)$ and $(V_2, \mathcal{B}_2)$, są *izomorficzne* jeśli istnieje taka bijekcja $\alpha : V_1 \mapsto V_2$, że dla dowolnej trójki $B_1 \in \mathcal{B}_1$ istnieje trójka $B_2 \in \mathcal{B}_2$, która spełnia $B_2 = \{\alpha(x_i) : x_i \in B_1\}$.

| $v$ | liczba nieizomorficznych STS($v$) |
|---|---:|
| 7 | 1 |
| 9 | 1 |
| 13 | 2 |
| 15 | 80 |
| 19 | 11 084 874 829 |
| 21 | 14 796 207 517 873 771 |

### Definicja

*Automorfizm* systemu trójek to izomorfizm w samego siebie. Zbiór wszystkich automorfizmów tworzy grupę automorfizmów systemu trójek.

### Definicja

STS($v$) jest *cykliczny* jeśli posiada automorfizm składający się z jednego cyklu długości $v$.

## Definicja

Uporządkowany 3-elementowy podzbiór $(a, b, c)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, (v-1)/2\}$ nazywamy *trójką różnicową* wtedy, gdy $a + b = c$ lub $a + b + c = v$.

## Problem różnicowy Hefftera

(1) Niech $v = 6k + 1$. Czy istnieje podział zbioru $\{1, 2, \ldots, 3k\}$ na $k$ trójek różnicowych?
(2) Niech $v = 6k + 3$. Czy istnieje podział zbioru $\{1, 2, \ldots, 3k + 1\} \setminus \{2k + 1\}$ na $k$ trójek różnicowych?

**Twierdzenie**

Problem różnicowy Hefftera posiada rozwiązanie dla każdego $v \geqslant 3$ z wyjątkiem $v = 9$.

Dla zadanego rozwiązania problemu Hefftera:
(1) każda trójka różnicowa $(a, b, c)$ wyznacza bazową trójkę $\{0, a, a + b\}$ cyklicznego $\mathrm{STS}(6k + 1)$
(1) każda trójka różnicowa $(a, b, c)$ wyznacza bazową trójkę $\{0, a, a + b\}$ cyklicznego $\mathrm{STS}(6k + 3)$; ponadto $\{0, 2k + 1, 4k + 2\}$ jest bazową trójką dla *krótkiej orbity*.

## Definicja

*Konfiguracją kombinatoryczną typu BIBD* nazywamy taką parę $(V, \mathcal{B})$, w której $|V| = v$ oraz $\mathcal{B}$ jest rodziną składającą się z $b$ *bloków*, każdy będącym $k$-elementowym podzbiorem zbioru $V$ o takiej własności, że każdy element z $V$ jest zawarty w dokładnie $r$ blokach i ponadto każdy 2-elementowy podzbiór zbioru $V$ jest zawarty w dokładnie $\lambda$ blokach. Liczby $v$, $b$, $r$, $k$ oraz $\lambda$ nazywane są *parametrami* konfiguracji BIBD.

Warunki konieczne na istnienie konfiguracji BIBD$(v, b, r, k, \lambda)$:
(1) $\lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{k-1}$,
(2) $\lambda v(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}$.

$r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} \qquad b = \frac{vr}{k}$

## Twierdzenie

Dla $k \leqslant 6$, konfiguracja $(v, k, 1)$ – BIBD istnieje gdy:

$k = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v \geqslant 2$

$k = 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v \equiv 1, 3 \pmod 6$

$k = 4$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v \equiv 1, 4 \pmod{12}$

$k = 5$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v \equiv 1, 5 \pmod{20}$

$k = 6$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v \equiv 1, 6 \pmod{15}$

oraz $v \neq 16, 21, 36, 46;\ \ 51, 61, 81, 166, 226, 231, 256, 261, 286, 316, 321, 346, 351, 376, 406, 411, 436, 441, 471, 501, 561, 591, 616, 646, 651, 676, 771, 796, 801$