MATEMATYKA DYSKRETNA

dr hab. Mariusz Meszka

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

http://home.agh.edu.pl/~meszka

Program wykładu

1. Zbiory, podzbiory i multizbiory. Generowanie podzbiorów.
2. Funkcje i rozmieszczenia. Permutacje. Metody generowania permutacji.
3. Zasada pudełkowania i przykłady jej zastosowań.
4. Zasada włączania-wyłączania. Nieporządki.
5. Podziały zbioru i liczby. Liczby Stirlinga.
6. Zależności rekurencyjne. Rozwiązywanie liniowych równań rekurencyjnych o stałych współczynnikach.
7. Funkcje tworzące; przykłady wykorzystania.
8. Zliczanie obiektów kombinatorycznych.

Program wykładu (cd.)

9. Pojęcia wstępne teorii grafów. Izomorfizm grafów. Spójność.
10. Droga Eulera. Cykle i ścieżki Hamiltona.
11. Grafy dwudzielne. Drzewa. Grafy planarne.
12. Kolorowanie wierzchołków i krawędzi w grafach. Zawężenie zagadnień kolorowania do poznanych rodzin grafów.
13. Przykłady dekompozycji grafów.

Literatura

[1] W. Lipski, Kombinatoryka dla programistów, WNT 2007.
[2] J. Jaworski, Z. Palka, J. Szymański, Matematyka dyskretna dla informatyków, WN UAM, 2011.
[3] R.A. Brualdi, Introductory combinatorics 5th Edition, Prentice Hall 2010.
[4] R.P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics 5th Edition, Pearson 2004.

Lemat

Liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2^n.

Lemat

Liczba wszystkich podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego wynosi $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Lemat

Prawdziwe są następujące zależności:

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}$

$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$

$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2 \binom{n+2k-i}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$

Twierdzenie dwumienne

Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

W szczególności, dla $x = y = 1$,

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.$$

Lemat

Liczba k-elementowych podzbiorów z powtórzeniami zbioru S, który zawiera n różnych elementów, każdy o nieograniczonej krotności, wynosi $\binom{n+k-1}{k}$.

Twierdzenie wielomienne

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1; n_2; \ldots; n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_t^{n_t},$$

gdzie sumowanie przeprowadzone jest po wszystkich nieujemnych całkowitoliczbowych rozwiązaniach równania

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_t = n,$$

oraz

$$\binom{n}{n_1; n_2; \ldots; n_t} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_t!}.$$

Generowanie wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego

generuj_podzbiory(n, p)
  if $p == n$ **then**
    for $i := 0$ **to** $n - 1$ **do**
      if (ciag[i] $== 1$) **then**
        wypisz(i)
  else
    ciag[p] $:= 0$
    generuj_podzbiory($n, p + 1$)
    ciag[p] $:= 1$
    generuj_podzbiory($n, p + 1$)

Start rekurencji od wywołania:
  generuj_podzbiory($n, 0$)

Generowanie podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego

```
 for i := 0 to k − 1 do
    zbior[i] := i + 1
do
    wypisz_zbior()
    if (zbior[k − 1] < n) then
        j := k − 1
    else
        j := k − 2
        while (j >= 0 && zbior[j] + 1 == zbior[j + 1]) do
            j − −
    if (j >= 0) then
        zbior[j] + +
        for i := j + 1 to k − 1 do
            zbior[i] := zbior[i − 1] + 1
while (j >= 0)
```

Generowanie podzbiorów k-elementowych z powtórzeniami

for $i := 0$ **to** $k-1$ **do**

  zbior$[i] := \cancel{i+}\,1$

do

  wypisz_zbior()

  if (zbior$[k-1] < n$) **then**

    $j := k-1$

  else

    $j := k-2$

    while ($j >= 0$ **&&** zbior$[j]\ \cancel{+1} ==$ zbior$[j+1]$) **do**

      $j--$

  if ($j >= 0$) **then**

    zbior$[j]++$

    for $i := j+1$ **to** $k-1$ **do**

      zbior$[i] :=$ zbior$[i-1]\ \cancel{+1}$

while ($j >= 0$)

Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, to liczba wszystkich funkcji $f : X \mapsto Y$ wynosi m^n.

Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, $m \geqslant n$, to liczba wszystkich funkcji różnowartościowych $f : X \mapsto Y$ wynosi $\frac{m!}{(m-n)!}$.

Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, $m \geqslant n$, to liczba wszystkich funkcji rosnących $f : X \mapsto Y$ wynosi $\binom{m}{n}$.

Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, to liczba wszystkich funkcji niemalejących $f : X \mapsto Y$ wynosi $\binom{m+n-1}{n}$.

Wniosek

Jeśli $|X| = |Y| = n$, to każda funkcja różnowartościowa $f : X \mapsto Y$ jest wzajemnie jednoznaczna (bijektywna). Wówczas liczba takich funkcji jest równa $n!$.

Definicja

Odwzorowanie bijektywne $f : X \mapsto X$ nazywamy *permutacją* zbioru X.

Wniosek

Liczba wszystkich permutacji zbioru n-elementowego wynosi $n!$.

Zbiór wszystkich permutacji zbioru n-elementowego oznaczamy symbolem S_n.

Permutację $f: X \mapsto X$ zapisujemy

$$f = \left(\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \dots & x_n \\ f(x_1), & f(x_2), & \dots & f(x_n) \end{array} \right)$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Wówczas

$$f =< f(1), f(2), \dots, f(n) > .$$

Definicja

Niech $f, g \in S_n$. *Złożeniem permutacji* f i g nazywamy permutację $g \circ f$ zdefiniowaną następująco

$$\forall i \in X: \ (g \circ f)(i) = g(f(i)).$$

Definicja

Permutację $e = < 1, 2, \ldots, n >$ nazywamy *identycznościową*.

Wniosek

Dla dowolnej permutacji $f \in S_n$ zachodzi $f \circ e = e \circ f = f$.

Definicja

Każda permutacja $f \in S_n$ wyznacza jednoznacznie taką permutację $f^{-1} \in S_n$, że $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$. f^{-1} nazywamy permutacją *odwrotną* do f.

Lemat

Dla dowolnych permutacji $f, g, h \in S_n$ spełnione są warunki:
(1) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
(2) $f \circ e = e \circ f = f$
(3) $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$.
Stąd wynika, że $(S_n, \circ)$ jest grupą, nazywaną *grupą symetryczną* stopnia n.

Definicja

Cyklem długości k nazywamy permutację $f_k = (x_1^k\, x_2^k\, \ldots x_k^k)$, w której $f_k(x_1^k) = x_2^k$, $f_k(x_2^k) = x_3^k$, $f_k(x_{k-1}^k) = x_k^k$, $f_k(x_k^k) = x_1^k$, oraz $f_k(x) = x$ dla każdego $x \in X \setminus \{x_1^k, x_2^k, \ldots, x_k^k\}$.

Lemat

Każdą permutację można przedstawić jednoznacznie w postaci złożenia (niezależnych) cykli. Przedstawienie takie nazywamy *rozkładem na cykle*.

Definicja

Mówimy, że permutacja f jest *typu* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ jeśli w rozkładzie na cykle zawiera dokładnie λ_i cykli długości i, dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Do zapisu typu stosujemy zwykle notację $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$ (pomijając i^{λ_i} jeśli $\lambda_i = 0$).

Lemat

Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ będzie multizbiorem o mocy n, który zawiera t parami różnych elementów; każdy element x_i ma krotność n_i, $i = 1, 2, \ldots, t$. Wtedy $\sum_{i=1}^{t} n_i = n$.
Liczba wszystkich permutacji multizbioru X wynosi

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}.$$

Generowanie permutacji zbioru n-elementowego

for $i := 0$ **to** $n - 1$ **do**
    perm[i] $:= i + 1$
do
    wypisz_permutacje()
    $i := n - 2$
    while ($i >= 0$ && perm[i] $>$ perm[$i + 1$]) **do**
        $i - -$
    if ($i >= 0$) **then**
        $j := n - 1$
        while perm[j] $<$ perm[i]) **do**
            $j - -$
        perm[i] :=: perm[j]
        $k := i + 1$
        $l := n - 1$
        while $l > k$ **do**
            perm[k] :=: perm[l]
            $k + +$
            $l - -$
while ($i >= 0$)

Zasada pudełkowania (Dirichleta)

Jeśli $n+1$ obiektów zostanie rozmieszczonych w n pudełkach, to wśród tych pudełek znajdzie się takie, które zawiera co najmniej 2 obiekty.

Uogólniona zasada pudełkowania

Niech $q_1, q_2, \ldots, q_n$ będą liczbami naturalnymi. Jeśli $q_1 + q_2 + \ldots + q_n + 1$ obiektów zostanie rozmieszczonych w n pudełkach, to znajdzie się pudełko o takim indeksie i, że zawiera ono $q_i + 1$ obiektów.

Niech X będzie danym zbiorem n-elementowym.
Niech $P_1, P_2, \ldots, P_t$ oznaczają pewne własności elementów z X.
Niech $A_i = \{x : x \in X$ oraz x ma własność $P_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant t$.

Twierdzenie

Liczba elementów zbioru X posiadających co najmniej jedną z własności $P_1, P_2, \ldots, P_t$ wynosi:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_t| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant t} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant t} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant t} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{t+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_t|.$$

Wniosek

Liczba elementów zbioru X nieposiadających żadnej z własności $P_1, P_2, \ldots, P_t$ wynosi:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_t}| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_t| =$$

$$|X| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant t} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant t} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant t} |A_i \cap A_j \cap A_k| +$$

$$+ \ldots + (-1)^t |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_t|.$$

Definicja

Permutację f nazywamy *nieporządkiem* jeśli, dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$, $f(i) \neq i$.

Twierdzenie

Niech D_n oznacza liczbę nieporządków zbioru n-elementowego X. Wówczas

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

Lemat

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D_n}{n!} = e^{-1} \approx 0,368.$$

Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, $n \geqslant m$, to liczba wszystkich odwzorowań suriektywnych $f : X \mapsto Y$ wynosi:

$$m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \binom{m}{3}(m-3)^n + \dots$$

$$+(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}1^n.$$

Definicja

Przez *podział* n-elementowego zbioru X na k bloków rozumiemy taką rodzinę $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ podzbiorów zbioru X, że $B_i \neq \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ oraz $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = X$, dla każdych $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Definicja

Liczbę podziałów zbioru n-elementowego na k bloków nazywamy *liczbą Stirlinga drugiego rodzaju* i oznaczamy $S(n, k)$.

Lemat

Dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju zachodzi zależność

$$\begin{array}{lll} S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k) & \text{dla} & 0 < k < n \\ S(n,n) = 1 & \text{dla} & n \geqslant 0 \\ S(n,0) = 0 & \text{dla} & n > 0 \end{array}$$

Definicja

Liczbę podziałów zbioru n-elementowego nazywamy *liczbą Bella* i oznaczamy symbolem $B(n)$.

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)$$

Lemat

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B(i)$$

Generowanie wszystkich podziałów zbioru

```
generuj_bloki(p, l)
    if p == n then
        wypisz_blok()
        return
    for i := 1 to l + 1 do
        blok[p] := i
        if i < l + 1 then
            generuj_bloki(p + 1, l)
        else
            generuj_bloki(p + 1, l + 1)
```

Start rekurencji od wywołania:

```
    generuj_bloki(0, 0)
```

Generowanie podziałów zbioru na k bloków

```
generuj_bloki(p, l)
    if p == n then
        wypisz_blok()
        return
    for i := 1 to l + 1 do
        blok[p] := i
        if i < l + 1 then
            generuj_bloki(p + 1, l)
        else
            generuj_bloki(p + 1, l + 1)                    if l + 1 <= k
then
                generuj_bloki(p + 1, l + 1)                    if
n − 1 − p >= k − l then
                generuj_bloki(p + 1, l)
        else
            if l + 1 <= k then
                generuj_bloki(p + 1, l + 1)
```

Definicja

Podziałem liczby n na k składników nazywamy taki ciąg liczb naturalnych $< b_1, b_2, \ldots, b_k >$, że $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_k > 0$ oraz $b_1 + b_2 + \ldots + b_k = n$.

Niech $P(n, k)$ oznacza liczbę podziałów liczby n na k składników, natomiast $P(n)$ liczbę wszystkich podziałów.

$$P(n) = \sum_{k=0}^{n} P(n, k)$$

$$P(0, 0) = P(0) = 1$$

Lemat

Liczba podziałów liczby n na k składników jest równa liczbie tych podziałów liczby n, w których największy składnik ma wartość k.

$$
\begin{aligned}
P(n,k) &= 0 \quad \text{dla} \quad n < k \\
P(n,n) &= 1 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 0 \\
P(n,0) &= 0 \quad \text{dla} \quad n > 0
\end{aligned}
$$

Lemat

Dla $n \geqslant k \geqslant 0$ zachodzi zależność

$$P(n,k) = \sum_{i=0}^{k} P(n-k, i)$$

Generowanie podziałów liczby n

podział[0] $:= n$
$k := 1$
wypisz_podział(k)
while podział[0] > 1 **do**
    $p := k - 1$
    while podział[p] $== 1$ **do**
        $p - -$
    podział[p] $- -$
    $s := k - p$
    while $s > 0$ **do**
        if $s >=$podział[p] **then**
            podział[$p + 1$] $:=$ podział[p]
        else
            podział[$p + 1$] $:= s$
        $s := s-$ podział[$p + 1$]
        $p + +$
    $k := p + 1$
    wypisz_podział(k)

Definicja

Liczbę Stirlinga pierwszego rodzaju oznaczamy symbolem $s(n,k)$ i definiujemy jako liczbę tych permutacji zbioru n-elementowego, które w rozkładzie na cykle posiadają k cykli.

Lemat

Dla liczb Stirlinga pierwszego rodzaju zachodzi zależność

$$\begin{array}{lll} s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)\cdot s(n-1,k) & \text{dla} & 0 < k < n \\ s(n,n) = 1 & \text{dla} & n \geqslant 0 \\ s(n,0) = 0 & \text{dla} & n > 0 \end{array}$$

Definicja

Niech $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem liczb. Mówimy, że spełnia on *liniowe równanie rekurencyjne* stopnia k jeśli istnieją współczynniki $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ ($a_k \neq 0$):

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \ldots + a_k h_{n-k} + b, \ (n \geqslant k),$$

gdzie każdy ze współczynników $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ może zależeć od n.

Ciąg liczb $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ spełniających powyższe równanie jest jednoznacznie wyznaczony przez liczby $h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}$ nazywane *wartościami początkowymi*.

Liniowe równanie rekurencyjne jest *homogeniczne*, jeśli $b = 0$.

Liniowe równanie rekurencyjne ma *stałe współczynniki*, jeśli każdy ze współczynników $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jest stałą.

Twierdzenie

Niech q będzie niezerową stałą.
Wówczas $h_n = q^n$ jest rozwiązaniem homogenicznego równania rekurencyjnego liniowego o stałych współczynnikach:

$$h_n - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \ldots - a_k h_{n-k} = 0, \ (a_k \neq 0, \ n \geqslant k),$$

wtedy i tylko wtedy, gdy q jest pierwiastkiem wielomianu:

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} \ldots - a_k = 0.$$

Wielomian ten nazywany jest *wielomianem charakterystycznym*, a wszystkie jego pierwiastki *pierwiastkami charakterystycznymi*.

Jeśli wielomian charakterystyczny ma k różnych pierwiastków $q_1, q_2, \ldots, q_k$, wtedy

$$h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_k q_k^n$$

stanowi ogólną postać rozwiązania.

Dla każdego wyboru wartości początkowych $h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}$ istnieją jednoznacznie określone stałe $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Jeśli q_i jest pierwiastkiem s_i-krotnym wielomianu charakterystycznego, to wówczas każda z wartości
$h_n = q_i^n$, $h_n = nq_i^n$, $h_n = n^2 q_i^n, \ldots, h_n = n^{s_i - 1} q_i^n$
jest rozwiązaniem równania, a stąd

$$h_n^{(i)} = c_1 q_i^n + c_2 n q_i^n + \ldots + c_{s_i} n^{s_i - 1} q_i^n$$

jest rozwiązaniem dla pierwiastka q_i,
przy każdym wyborze współczynników $c_1, c_2, \ldots c_{s_i}$.

Niech $q_1, q_2, \ldots, q_t$ będą różnymi pierwiastkami, o krotnościach odpowiednio $s_1, s_2, \ldots s_t$.
Ogólna postać rozwiązania homogenicznego równania rekurencyjnego liniowego o stałych współczynnikach:

$$h_n = h_n^{(1)} + h_n^{(2)} + \ldots + h_n^{(t)}.$$

W celu rozwiązania niehomogenicznego równania rekurencyjnego liniowego o stałych współczynnikach wykonujemy następujące kroki:
(1) znajdujemy rozwiązanie ogólne odpowiedniego równania homogenicznego
(2) znajdujemy rozwiązanie szczególne równania niehomogenicznego
(3) łączymy oba rozwiązania z wykorzystaniem wartości początkowych.

Wykonanie kroku (2) wymaga próby wykorzystania różnych form rozwiązania szczególnego h_n w zależności od postaci czynnika niehomogenicznego b. W szczególności:
(i) gdy b jest wielomianem stopnia k to za testowane rozwiązanie szczególne h_n przyjmujemy również wielomian stopnia k,
(ii) gdy $b = sp^n$ to próbujemy wykorzystać $h_n = tp^n$.

Powodzenie w wykonaniu kroku (2) zależy od postaci wielomianu charakterystycznego.

Definicja

Nieskończonemu ciągowi $a_0, a_1, a_2, \ldots$ może zostać przypisany szereg formalny

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Wówczas $A(x)$ oznacza *funkcję tworzącą* (*zwyczajną*) dla tego ciągu.

Jeśli $a_k = 0$ dla każdego $k > n$, to wtedy szereg utożsamiamy z wielomianem $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$.

Lemat

Każdy ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ wyznacza jednoznacznie funkcję tworzącą $A(x)$. Każda funkcja $A(x)$ określa jednoznacznie ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Definicja

Funkcją tworzącą eksponencjalną nieskończonego ciągu $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jest szereg formalny

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}.$$

Lemat

Każdy ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ wyznacza jednoznacznie funkcję tworzącą eksponencjalną $B(x)$. Każda funkcja $B(x)$ określa jednoznacznie ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$.