

MATEMATYKA DYSKRETNA

dr hab. Mariusz Mészka

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

<http://home.agh.edu.pl/~meszka>

Program wykładu

1. Zasada indukcji matematycznej.
2. Zbiory, podzbiory i multizbiory.
3. Funkcje i rozmieszczenia. Permutacje.
4. Zasada pudełkowania i przykłady jej zastosowań.
5. Zasada włączania-wyłączania. Nieporządki.
6. Podziały zbioru i liczby. Liczby Stirlinga.
7. Zależności rekurencyjne. Rozwiązywanie liniowych równań rekurencyjnych o stałych współczynnikach.
8. Funkcje tworzące; przykłady wykorzystania.
9. Zliczanie obiektów kombinatorycznych.

Program wykładu (cd.)

10. Pojęcia wstępne teorii grafów. Izomorfizm grafów. Spójność.
11. Droga Eulera. Cykle i ścieżki Hamiltona.
12. Grafy dwudzielne. Drzewa. Grafy planarne.
13. Kolorowanie wierzchołków i krawędzi w grafach.

Literatura

- [1] J. Jaworski, Z. Palka, J. Szymański, Matematyka dyskretna dla informatyków, WN UAM, 2011.
- [2] M. Murat, I. Gorgol, Matematyka dyskretna w zadaniach, PWN, Warszawa, 2024.
- [3] R.A. Brualdi, Introductory combinatorics 5th Edition, Prentice Hall 2010.

Zasada indukcji matematycznej

Niech $S(n)$ będzie pewnym stwierdzeniem zależnym od parametru n , $n \in \mathbb{N}$.

Zakładamy, że:

- (1) istnieje takie n_0 , że stwierdzenie $S(n_0)$ jest prawdziwe,
- (2) jeżeli $S(k)$ jest prawdziwe dla $k \geq n_0$, to $S(k + 1)$ jest również prawdziwe.

Wówczas $S(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \geq n_0$.

Silna zasada indukcji

Niech $S(n)$ będzie pewnym stwierdzeniem zależnym od parametru n , $n \in \mathbb{N}$.

Zakładamy, że:

- (1) istnieje takie n_0 , że stwierdzenie $S(n_0)$ jest prawdziwe,
- (2) jeżeli $k \geq n_0$ oraz $S(l)$ jest prawdziwe dla każdego $l \in \{n_0, n_0 + 1, \dots, k\}$, to $S(k + 1)$ jest również prawdziwe.

Wówczas $S(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \geq n_0$.

Lemat

Liczba wszystkich podzbiorów zbioru n -elementowego wynosi 2^n .

Lemat

Liczba wszystkich podzbiorów k -elementowych zbioru n -elementowego wynosi $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Lemat

Prawdziwe są następujące zależności:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$$

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i}^2 \binom{n+2k-i}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

Twierdzenie dwumienne

Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

W szczególności, dla $x = y = 1$,

$$2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}.$$

Lemat

Liczba k -elementowych podzbiorów z powtórzeniami zbioru S , który zawiera n różnych elementów, każdy o nieograniczonej krotności, wynosi $\binom{n+k-1}{k}$.

Twierdzenie wielomienne

Niech $x_1, x_2, \dots, x_t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1; n_2; \dots; n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t},$$

gdzie sumowanie przeprowadzone jest po wszystkich nieujemnych całkowitoliczbowych rozwiązaniach równania

$$n_1 + n_2 + \dots + n_t = n,$$

oraz

$$\binom{n}{n_1; n_2; \dots; n_t} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}.$$

Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, to liczba wszystkich funkcji $f : X \mapsto Y$ wynosi m^n .

Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, $m \geq n$, to liczba wszystkich funkcji różnowartościowych $f : X \mapsto Y$ wynosi $\frac{m!}{(m-n)!}$.

Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, $m \geq n$, to liczba wszystkich funkcji rosnących $f : X \mapsto Y$ wynosi $\binom{m}{n}$.

Lemat

Jeśli $|X| = n$ oraz $|Y| = m$, to liczba wszystkich funkcji niemalejących $f : X \mapsto Y$ wynosi $\binom{m+n-1}{n}$.

Wniosek

Jeśli $|X| = |Y| = n$, to każda funkcja różnowartościowa $f : X \mapsto Y$ jest wzajemnie jednoznaczna (bijektywna). Wówczas liczba takich funkcji jest równa $n!$.

Definicja

Odwzorowanie bijektywne $f : X \mapsto X$ nazywamy *permutacją* zbioru X .

Wniosek

Liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego wynosi $n!$.

Zbiór wszystkich permutacji zbioru n -elementowego oznaczamy symbolem S_n .

Permutację $f : X \mapsto X$ zapisujemy

$$f = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots & x_n \\ f(x_1), & f(x_2), & \dots & f(x_n) \end{pmatrix}$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $X = \{1, 2, \dots, n\}$.

Wówczas

$$f = \langle f(1), f(2), \dots, f(n) \rangle .$$

Definicja

Niech $f, g \in S_n$. Złożeniem permutacji f i g nazywamy permutację $g \circ f$ zdefiniowaną następująco

$$\forall i \in X : (g \circ f)(i) = g(f(i)).$$

Definicja

Permutację $e = \langle 1, 2, \dots, n \rangle$ nazywamy *identycznościową*.

Wniosek

Dla dowolnej permutacji $f \in S_n$ zachodzi $f \circ e = e \circ f = f$.

Definicja

Każda permutacja $f \in S_n$ wyznacza jednoznacznie taką permutację $f^{-1} \in S_n$, że $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$. f^{-1} nazywamy permutacją *odwrotną* do f .

Lemat

Dla dowolnych permutacji $f, g, h \in S_n$ spełnione są warunki:

$$(1) (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

$$(2) f \circ e = e \circ f = f$$

$$(3) f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e.$$

Stąd wynika, że (S_n, \circ) jest grupą, nazywaną *grupą symetryczną* stopnia n .

Definicja

Cyklem długości k nazywamy permutację $f_k = (x_1^k x_2^k \dots x_k^k)$, w której $f_k(x_1^k) = x_2^k$, $f_k(x_2^k) = x_3^k$, $f_k(x_{k-1}^k) = x_k^k$, $f_k(x_k^k) = x_1^k$, oraz $f_k(x) = x$ dla każdego $x \in X \setminus \{x_1^k, x_2^k, \dots, x_k^k\}$.

Lemat

Każdą permutację można przedstawić jednoznacznie w postaci złożenia (niezależnych) cykli. Przedstawienie takie nazywamy *rozkładem na cykle*.

Definicja

Mówimy, że permutacja f jest *typu* $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ jeśli w rozkładzie na cykle zawiera dokładnie λ_i cykli długości i , dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Do zapisu typu stosujemy zwykle notację $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ (pomijając i^{λ_i} jeśli $\lambda_i = 0$).

Lemat

Niech $X = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ będzie multizbiorem o mocy n , który zawiera t parami różnych elementów; każdy element x_i ma krotność n_i , $i = 1, 2, \dots, t$. Wtedy $\sum_{i=1}^t n_i = n$.

Liczba wszystkich permutacji multizbioru X wynosi

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}.$$

Zasada pudełkowania (Dirichleta)

Jeśli $n + 1$ obiektów zostanie rozmieszczonych w n pudełkach, to wśród tych pudełek znajdzie się takie, które zawiera co najmniej 2 obiekty.

Uogólniona zasada pudełkowania

Niech q_1, q_2, \dots, q_n będą liczbami naturalnymi. Jeśli $q_1 + q_2 + \dots + q_n + 1$ obiektów zostanie rozmieszczonych w n pudełkach, to znajdzie się pudełko o takim indeksie i , że zawiera ono $q_i + 1$ obiektów.