



INSTRUKCJA DO ĆWICZENIA NR 1

LAB 1

**TEMAT:
FFT, FILTRACJA, MOC SYGNAŁU**

I. CEL ĆWICZENIA:

Celem ćwiczenia jest wprowadzenie studentów w zagadnienie szybkiej transformaty Fouriera, filtracji oraz określania mocy sygnału, poznanie podstawowych bloków funkcyjnych SIMULINKA służących do przeprowadzania wyżej wymienionych operacji, nabycie umiejętności doboru i konstruowania układów filtrujących oraz nabycie umiejętności z zakresu interpretowania otrzymanych wyników.

II. WSTĘP TEORETYCZNY:

1. TRANSFORMACJA FOURIERA

Transformacja Fouriera umożliwia nam przedstawienie sygnału zmiennego w czasie na skali częstotliwości. Przy pomocy tej transformaty każdy sygnał o okresie 2π można przedstawić w postaci składowych sinusoidalnych o odpowiedniej amplitudzie, fazie oraz częstotliwości. Wynikiem transformacji jest transformata. Transformata Fouriera $F(\omega)$ funkcji $f(t)$ jest przydatna do analizowania częstotliwości sygnału w pewnym przedziale czasu. Na funkcję $f(t)$ oraz na jej transformatę należy patrzeć jak na różne reprezentacje tej samej funkcji w różnych dziedzinach na przykład: *czas* \rightarrow *częstotliwość*, *położenie* \rightarrow *wektor falowy*.

Szeregiem Fouriera nazywamy rozwinięcie funkcji okresowej w następującej postaci:

$$f(t) = a_0 \cos(0) + \sum_{n=1}^N [a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t] \text{ dla } t_0 < t \leq t_0 + T, \text{ gdzie}$$

$f(t)$ – dowolna okresowa funkcja czasu,

$a_0 \cos(0)$ – pierwszy składnik sumy (równy wartości a_0),

a_0 - średnia funkcji $f(t)$ (jest tak dlatego, że wartość średnia sinusów i cosinusów jest równa zero)

Poszczególne współczynniki szeregu znajdujemy z następujący sposób:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

Zatem w wyniku rozwinięcia funkcji przy pomocy szeregu Fouriera otrzymujemy rodzinę okresowych sygnałów sinusoidalnych i cosinusoidalnych, której suma w dziedzinie czasu daje nam sygnał pierwotny.

Transformacja Fouriera zdefiniowana jest jako następujące przekształcenie:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ponieważ t jest zmienną podcałkową to wynik takiego całkowania nie jest funkcją czasu tylko funkcją częstotliwości. Bardzo ważne twierdzenie o transformacji Fouriera mówi, że na podstawie danej transformaty Fouriera funkcji czasu można zawsze obliczyć pierwotną funkcję czasu. Mówimy zatem, że transformacja jest wzajemnie jednoznaczna. Wynika z tego, że zarówno $f(t)$ jak i jej transformata $F(\omega)$ jednoznacznie opisują funkcję $f(t)$.

Odwrotna transformacja Fouriera podaje sposób uzyskania funkcji $f(t)$ z jej transformaty i określana jest następującym przekształceniem:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Dyskretna transformacja Fouriera (DFT) – jest odpowiednikiem transformacji Fouriera dla sygnałów nieciągłych (próbkowanych). Definiowana jest podobnie jak ciągła transformacja Fouriera, ale całka jest zastąpiona przez sumowanie. Zatem dla ciągu N próbek funkcji czasu oddalonych od siebie o okres próbkowania T i o całkowitym czasie trwania sygnału NT transformacja DFT będzie definiowana następująco:

$$F(\omega) = \sum_0^{N-1} f(nT)e^{-j\omega nT} T$$

dyskretna transformacja Fouriera jest wygodną metodą aproksymowania transformacji Fouriera w przypadku gdy mamy do czynienia z przebiegami próbkowanymi i dobrze nadaje się do obliczeń z użyciem układów cyfrowych i komputerów.

Szybka transformacja Fouriera (FFT) – jest algorytmem bardzo upraszczającym i skracającym obliczenia, które muszą być wykonane, by znaleźć DFT. Algorytm ten polega na macierzowym zapisaniu transformaty DFT a następnie na jednolitym rozłożeniu punktów aproksymujących przebieg. Następnie macierz używana do obliczeń może być podzielona na kilka macierzy rzadkich (z dużą ilością zer), co znacznie upraszcza obliczenia.

2. FILTRY

Termin „filtr” wiąże się z usuwaniem czegoś niepożądanego. W teorii systemów liniowych pierwotnie był on stosowany do określania systemów, które eliminują składowe przebiegu czasowego o niepożądanych częstotliwościach. Zakres stosowania tego terminu rozszerzono potem na systemy, które mnożą składowe funkcji o różnych częstotliwościach przez odpowiednie współczynniki. Innymi słowy filtrem liniowym jest dowolny (zwykle pasywny) system liniowy mający charakterystykę dokładnie taką, jaka jest pożądana.

Rodzaje filtrów:

Filtr dolnoprzepustowy	Przepuszcza składowe sygnału o częstotliwościach znajdujących się poniżej częstotliwości odcięcia, a inne tłumi.
Filtr górnoprzepustowy	Przepuszcza składowe sygnału o częstotliwościach znajdujących się powyżej częstotliwości odcięcia, a inne tłumi.
Filtr pasmowoprzepustowy	Przepuszcza składowe sygnału o częstotliwościach znajdujących się pomiędzy dwoma wartościami częstotliwości odcięcia, a inne tłumi.
Filtr pasmowozaporowy	Tłumi składowe sygnału o częstotliwościach znajdujących się pomiędzy dwoma wartościami częstotliwości odcięcia, a pozostałe przepuszcza bez zmian

Praktycznie realizowalne filtry nie mają charakterystyk idealnych, co oznacza, że częstotliwość odcięcia nie jest nieskończenie wąska tylko stanowi pewne pasmo. Powoduje to częściowe tłumienie sygnału w obszarze tego pasma w taki sposób, że sygnał nie jest ani przenoszony w 100% ani tłumiony w 100%.

Filtry cyfrowe – są to systemy, które przetwarzają jeden ciąg liczb (wejście) na drugi ciąg liczb (wyjście). Każda liczba wyjściowa jest kombinacją liniową poprzednich liczb wejściowych. Matematycznie możemy zapisać to w następujący sposób:

$$y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)h(n-m), \text{ gdzie:}$$

$y(n)$ – sygnał wyjściowy,

$x(m)$ – sygnał wejściowy dla kolejnej próbki czasu,

$h(n-m)$ – wagi dla poszczególnych próbek,

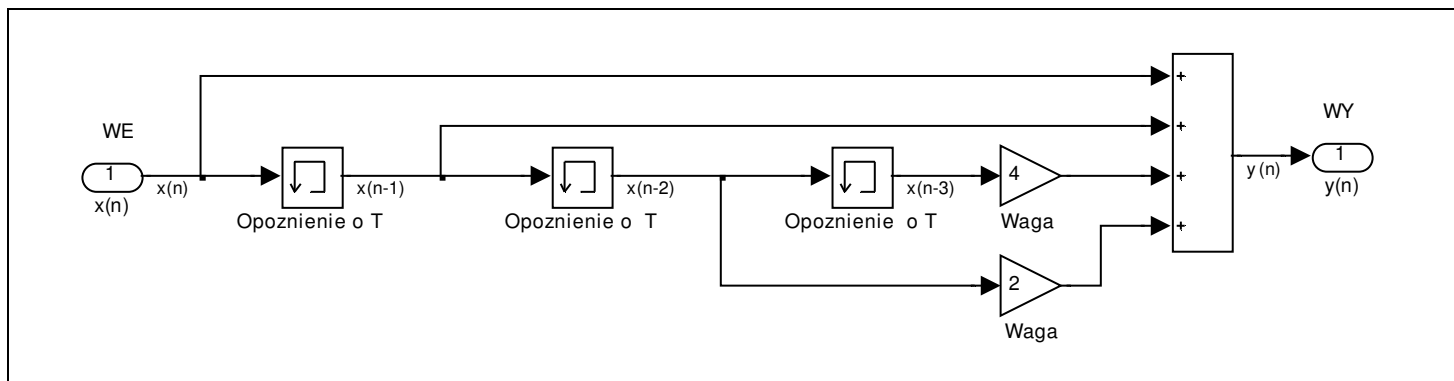
Schemat blokowy filtru cyfrowego przedstawiony jest na rysunku poniżej:



Przykładowy filtr cyfrowy o następujących parametrach:

$$h(n) = \begin{cases} 1, 1, 2, 4 & \text{dla } n = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{dla } n > 3 \end{cases}$$

będzie miał następujący wygląd:



Sygnały wyjściowe filtrów cyfrowych mogą również zależeć od swoich poprzednich wartości, zatem:

$$y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)h(n-m) + \sum_{m=0}^{n-1} y(m)k(n-m)$$

Ten ostatni typ filtru jest znany jako filtr rekursywny, ponieważ sygnały wyjściowe muszą być wyznaczone po kolei, tzn. że przed znalezieniem $y(3)$ muszą być wyznaczone $y(0)$, $y(1)$ i $y(2)$.

3. MOC I ENERGIA

Podstawowym zadaniem wielu systemów telekomunikacyjnych jest wzmocnienie sygnału wraz z jednoczesnym obniżeniem poziomu szumów. Dąży się zatem do zmniejszenia mocy szumów na wyjściu układu bez zmniejszenia mocy sygnału. Inaczej mówiąc dążymy do zwiększenia stosunku sygnału do szumu.

Energia sygnału $f(t)$ definiowana jest w następujący sposób:

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f^2(t)| dt$$

Jeżeli $f(t)$ byłoby napięciem na lub prądem płynącym przez jednoomowy rezystor to E_f byłoby całkowitą energią rozproszoną w tym rezystorze w postaci ciepła wielkość ta jest określona przez całkę dla dowolnej funkcji czasu $f(t)$, nawet jeśli nie przedstawia ona żadnego napięcia ani prądu. Wartość E_f bywa często nieskończona, dlatego jesteśmy zmuszeni zdefiniować moc średnią sygnału jako średnią pochodną energii po czasie otrzymując skończoną wartość.

Moc średnia sygnału $f(t)$ – definiowana jest jako średnia pochodna energii po czasie:

$$P_f = \text{moc średnia} = \overline{f^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt$$

Jeżeli E_f jest skończona to P_f musi być równa zero, a jeśli P_f jest niezerowa to E_f musi być nieskończona.

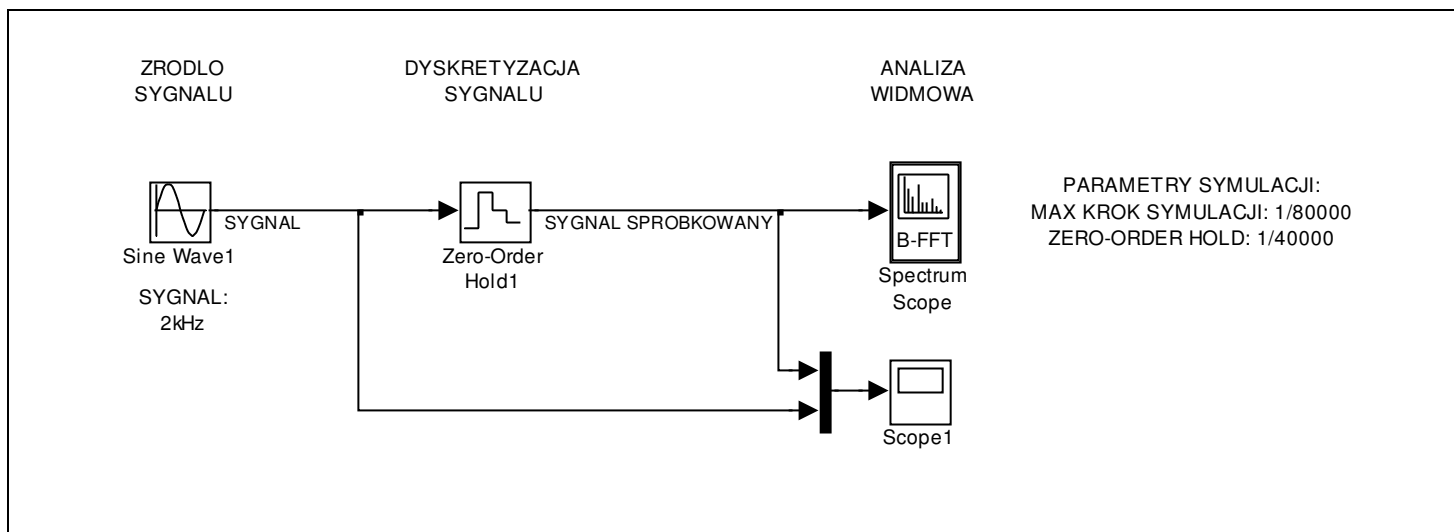
Ze względu na wartość średniej mocy sygnały możemy podzielić na:

GRUPA I $P_f = 0$	Są to wszystkie sygnały o skończonej energii
GRUPA II $0 < P_f < \infty$	Są to między innymi funkcje okresowe
GRUPA III $P_f = \infty$	Są to teoretyczne sygnały jak np.: ciąg impulsów delta – nie istnieją w rzeczywistości

III. ZADANIA DO WYKONANIA:

1. ANALIZATOR WIDMA

Analizator widma służy do obserwacji widma sygnału w dziedzinie częstotliwości. Należy skonstruować układ taki jak pokazany na rysunku poniżej i dobrać odpowiednie parametry symulacji.



Aby dostosować zbudowany układ do potrzeb należy zmienić następujące parametry bloku analizatora widma:

Scope properties:	
Buffer input	Włączyć buforowanie wejścia
Window type	Ustawić wybrany typ okna (domyślnie okno Hanna)
Display properties:	
Show grid	Pokazywanie siatki na tle widma sygnału (włączyć)
Persistence	Utrzymywanie kolejnych wyświetleń przebiegu (wyłączyć)
Frame number	Liczba ramek branych do obliczeń
Channel legend	Opis poszczególnych kanałów analizy
Compact display	Widok kompaktowy
Open scope at..	Otwiera okno analizatora podczas startu symulacji (włączyć)
Axis properties:	
Frequency units	Jednostka na osi x (ustawić na Hertz)
Frequency range	Zakres obserwowanego sygnału (w zależności od sygnału ustawić na jedną z 3 możliwości)
Inherit sample...	Aktywować opcje dziedziczenia czasu próbkowania z poprzednich bloków funkcjonalnych
Amplitude scaling	Ustawić Magnitude-squared
Minimum Y-Limit	Ustawić 0 (UWAGA: Nie używać opcji autoscale, ponieważ przebiegi stają się nieczytelne)
Maximum Y-Limit	Ustawić zgodnie z przebiegiem
Y-axis title	Tytuł na osi y
Line properties:	
Line visibilities, styles, markers, colors	Ustawienia parametrów wyświetlanych wykresów (można zmienić by zwiększyć czytelność przebiegów)



Korzystając z układu analizatora widma wykreślić widma oraz przedstawić przebiegi czasowe następujących przebiegów i przeanalizować ich zachowanie się wraz ze zmianą parametrów tych przebiegów (należy pamiętać o dobraniu właściwych parametrów symulacji tak, aby przebiegi czasowe i widmo były przedstawione z odpowiednią dokładnością):

- Pojedynczy sygnał sinusoidalny o różnej częstotliwości (z zakresu 1kHz do 20kHz),
- Sygnał sinusoidalny o częstotliwości rosnącej (Chirp signal),
- Sygnał prostokątny o dowolnej wybranej częstotliwości (z zakresu 1kHz do 20kHz),
- Sygnał piłokształtny o dowolnej wybranej częstotliwości (z zakresu 1kHz do 20kHz),
- Suma dwóch sygnałów sinusoidalnych o częstotliwościach 3kHz i 5kHz,
- Kwadrat sygnału sinusoidalnego o dowolnej częstotliwości (z zakresu 1kHz do 20kHz),
- Sygnał losowy (szum) wygenerowany z generatora sygnałów.

UWAGA: Widmo sygnałów należy oglądać przy różnych ustawieniach parametru Frequency range (zakładka Axis properties), pamiętając że widmo FFT sygnału jest symetryczne względem osi y ponieważ ma część rzeczywistą i urojona. Również należy pamiętać o właściwym dobraniu czasu dyskretyzacji (okresu próbkowania) w bloku Zero-Order Hold, gdyż ten czas wpływa na zakres obserwowanych częstotliwości w bloku Analizatora Widma.

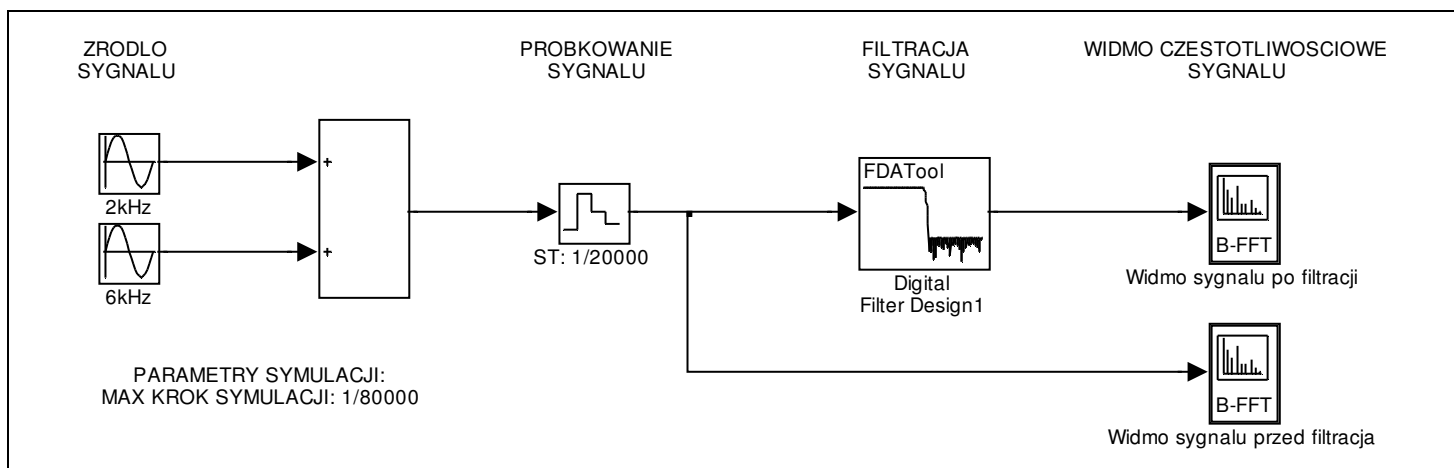
2. BUDOWA PROSTYCH FILTRÓW CYFROWYCH

Należy zbudować układy filtrów cyfrowych o następujących parametrach:

Układ 1.	Filtr cyfrowy o następujących parametrach: $h(n) = \begin{cases} 4, 8, 20, 0, 3, 1, 5 & \text{dla } n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{dla } n > 6 \end{cases}$ i zaobserwować jego działanie dla wejściowych sygnałów sinusoidalnych o kilku różnych częstotliwościach (przedstawić niezbędne przebiegi czasowe oraz częstotliwościowe)
Układ 2.	Filtr cyfrowy rekurencyjny o następujących parametrach: $h(n) = \begin{cases} 2, 2, 1, 7, 5 & \text{dla } n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{dla } n > 4 \end{cases}$ $k(n) = \begin{cases} 2, 1, 8, 2, 1 & \text{dla } n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{dla } n > 4 \end{cases}$ i zaobserwować jego działanie dla wejściowych sygnałów sinusoidalnych o kilku różnych częstotliwościach (przedstawić niezbędne przebiegi czasowe oraz częstotliwościowe)

3. FILTRACJA SYGNAŁÓW

Skonstruować układ taki jak przedstawiono poniżej i wykreślić przebiegi jego sygnałów:

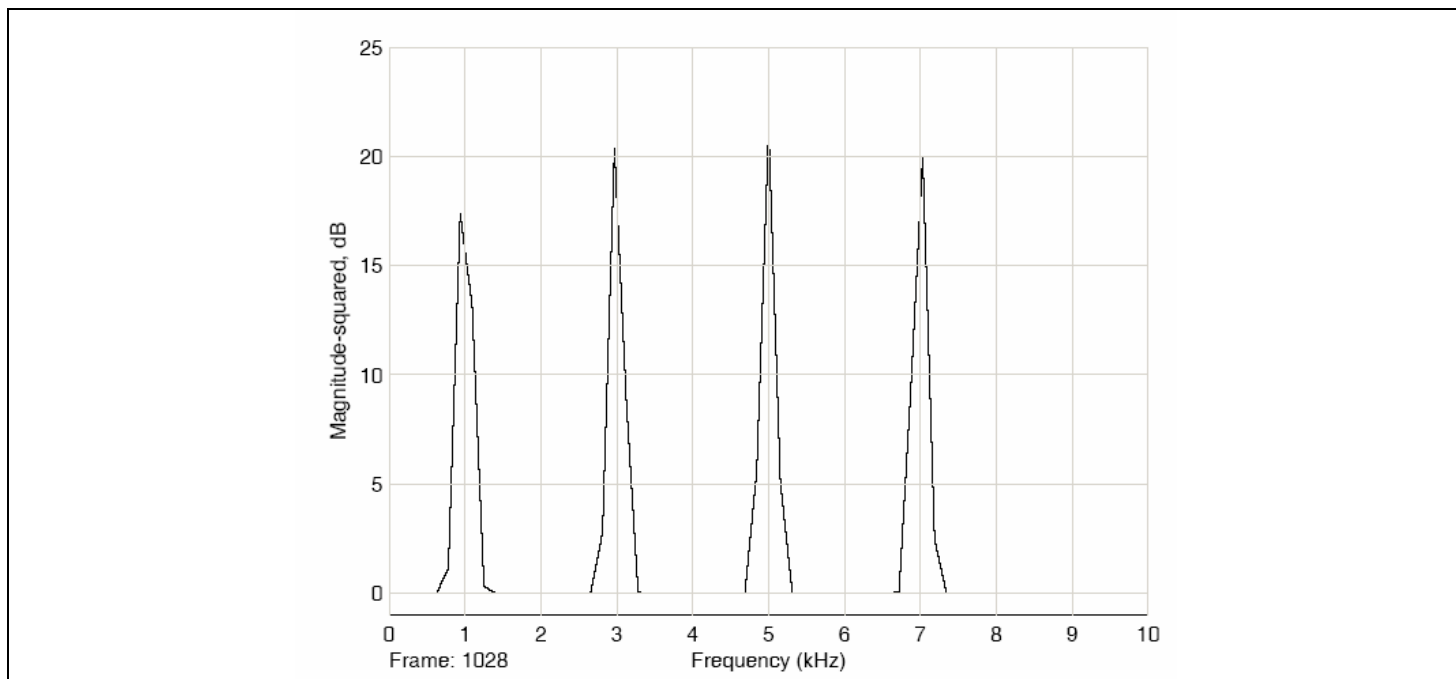


Aby poprawnie zaprojektować filtr używając bloku *Digital Filter Design* należy ustawić następujące parametry w oknie dialogowym filtru tak jak przedstawiono to na rysunku poniżej:

Najważniejsze ustawienia bloku *Digital Filter Design*:

Response type:	
Lowpass	Filtr dolnoprzepustowy (FDP)
Highpass	Filtr górnooprzepustowy (FGP)
Bandpass	Filtr pasmowoprzepustowy (FPP)
Bandstop	Filtr pasmowozaporowy (FPZ)
Frequency specifications: (<i>ustawiane w zależności od typu filtra</i>)	
Units	Ustawienia jednostek w których podawane są progi filtracji oraz czas próbkowania
Fs	czas próbkowania (<i>należy ustawić taki sam jak w bloku Zero-Order Hold</i>)
Fpass	Częstotliwość składowej sygnału, która będzie przepuszczane bez tłumienia
Fstop	częstotliwość składowej sygnału, która będzie całkowicie tłumiona <i>UWAGA: W paśmie pomiędzy częstotliwościami Fpass i Fstop filtr częściowo tłumি sygnały</i>
Więcej informacji: <i>SIMULINK - HELP</i>	

W oparciu o poprzedni schemat blokowy zbudować układ, który na wyjściu ma takie widmo jak zostało przedstawione na rysunku poniżej (cztery wstęgi odpowiednio na częstotliwościach równych: 1kHz 3kHz, 5kHz oraz 7kHz):



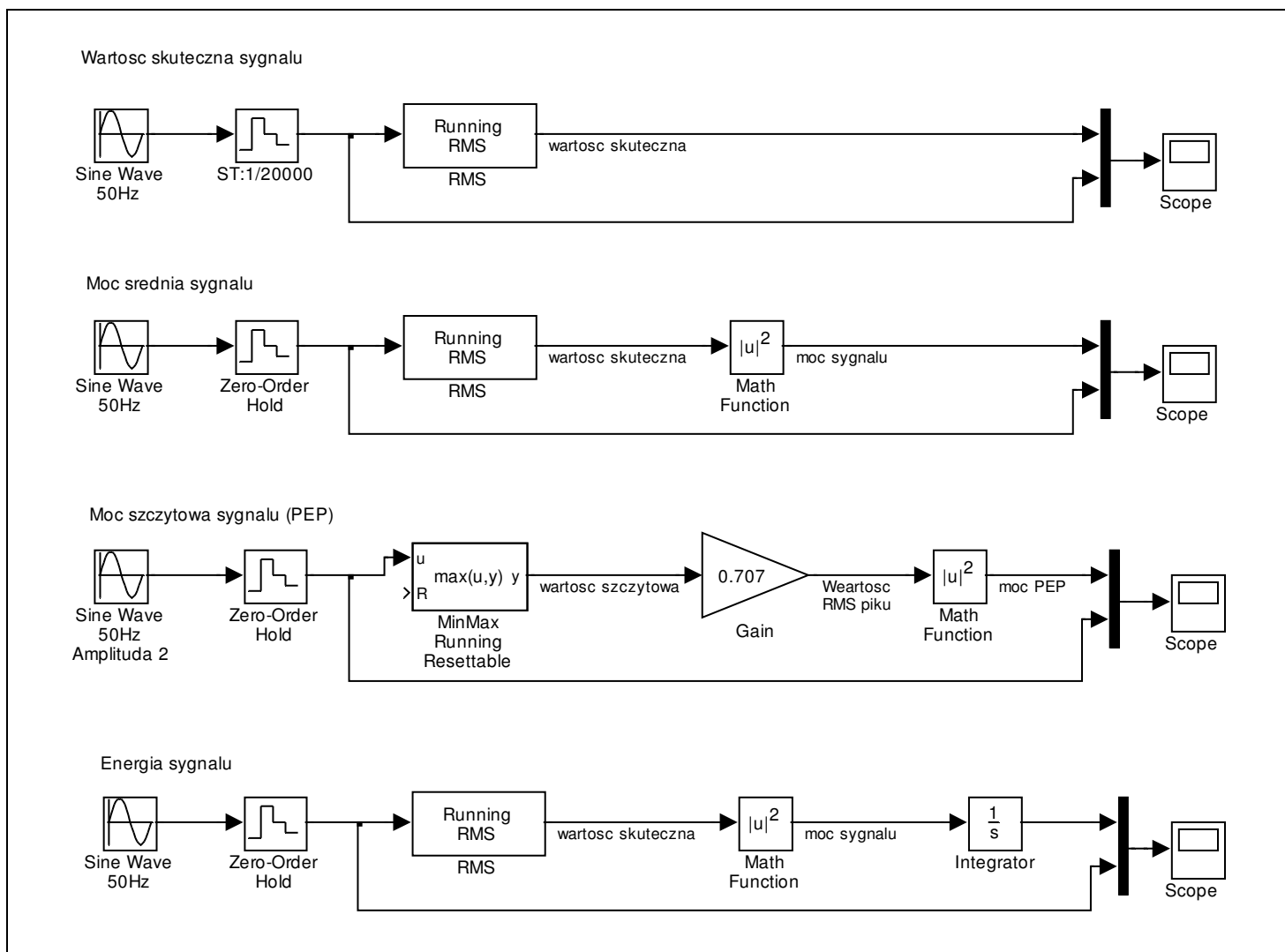
Używając bloku filtrującego *Digital Filter Design* skonstruować filtry, które będą filtrowały wyżej przedstawiony sygnał w następujący sposób:

- Filtracja pierwszych dwóch wstęp (usuwanie częstotliwości składowych: 1kHz oraz 3kHz),
- Filtracja ostatnich dwóch wstęp (usuwanie częstotliwości składowych: 5kHz oraz 7kHz),
- Filtracja dwóch wewnętrznych wstęp sygnału (usuwanie częstotliwości składowych: 3kHz oraz 5kHz),
- Filtracja dwóch zewnętrznych wstęp sygnału (usuwanie częstotliwości składowych: 1kHz oraz 7kHz),
- Ponadto dla sygnału losowego (szum) zbudować filtr pasmowy przepuszczający sygnał w dowolnym wybranym paśmie częstotliwości o szerokości 4kHz.

Przedstawić otrzymane rezultaty na przebiegach widmowych oraz na przebiegach czasowych pamiętając o prawidłowym doborze parametrów wyświetlania sygnałów.

4. OBLICZANIE MOCY I ENERGII SYGNAŁÓW

Zbudować układy jak pokazano na rysunku poniżej:



W oparciu o zbudowane układy dokonać pomiaru parametrów:

- wartości skutecznej,
- mocy średniej,
- mocy szczytowej PEP (Peak Envelope Power),
- oraz energii wytworzonej przez sygnał w trakcie 3s transmisji

dla następujących sygnałów:

- Sygnał sinusoidalny o częstotliwości 2kHz,
- Kwadrat sygnału sinusoidalnego o częstotliwości 2kHz,
- Sygnał prostokątny o okresie 10sekund, współczynniku wypełnienia 50% i amplitudzie od 0 do 10V,
- Sygnał piłokształtny o okresie 10 sekund i o amplitudzie 10V,
- Sygnał losowy o paśmie działania 2kHz,

Wykreślić przebiegi czasowe w/w sygnałów oraz wartości obliczonych parametrów

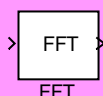
5. WNIOSKI

Na podstawie przeprowadzonych symulacji wyciągnąć wnioski ustosunkowujące się do następujących tematów:

- Opisać jak zmieniają się widma częstotliwościowe badanych sygnałów wraz ze zmianą ich parametrów,
- Opisać jak wyglądają widma poszczególnych rodzajów oglądanych sygnałów i w skrócie napisać dlaczego mają taki kształt a nie inny,
- Napisać, czym się różni filtr idealny od filtru rzeczywistego,
- Napisać, jakie praktyczne znaczenie ma określenie różnych rodzajów mocy sygnału.

Dodatkowo (na ocenę celującą po spełnieniu wszystkich podstawowych warunków)

- Zapoznać się z działaniem bloku FFT:



- Zbudować prosty układ wykreślający widmo sygnału z zastosowaniem tego bloku i opisać parametry symulacji oraz nastawy poszczególnych bloków,
- Podać pełne matematyczne podstawy szybkiej transformacji Fouriera (FFT) wraz z niezbędnymi wyprowadzeniami,
- Dokonać prostej przykładowej transformacji Fouriera dowolnego wybranego sygnału (na wzorach),
- Zmieścić spis materiałów źródłowych (literatura, czasopisma, adresy stron www).

lub

- Opisać szczegółowo następujące rodzaje filtrów:
 - Butterworth
 - Czebyszew typ I
 - Czebyszew typ II
 - Elliptic
 - Bessel
 - Zastosowanie krzywych sklepanych (splajnów) w filtracji
- Wszystkie informacje należy podać w postaci spójnej uwzględniając opis filtru, jego podstawowe charakterystyki (amplitudowa i fazowa) podstawowe wzory, cechy charakterystyczne w porównaniu do innych filtrów, wady zalety oraz zakres zastosowań. Należy również przedstawić definicję podstawowych pojęć związanych z filtracją sygnałów i konstruowaniem tego typu filtrów.
- Zmieścić spis materiałów źródłowych (literatura, czasopisma, adresy stron www).

Uwaga: W przypadku osób piszących sprawozdanie rozszerzone (na ocenę celującą) zakres materiału dodatkowego może być dołączony do sprawozdania w terminie późniejszym, ale nie dłuższym niż 2 tygodnie od ostatecznego terminu oddania podstawowej części sprawozdania

IV. SPRAWOZDANIE:

W sprawozdaniu należy zamieścić wszystkie zrealizowane w punkcie III zadania. Każde zadanie powinno być zatytułowane i ponumerowane, powinno zawierać rysunek z wykonanym w SIMULINKU schematem blokowym układu oraz przebiegi otrzymane z poszczególnych układów. W sprawozdaniu z ćwiczenia pierwszego należy umieścić wnioski końcowe dające odpowiedź na pytania zawarte w punkcie III.5 instrukcji i podsumowujące przeprowadzone badania.

Ogólne uwagi dotyczące sprawozdania:

- Strona tytułowa, powinna zawierać: Imiona i nazwiska osób, numer grupy, nazwę przedmiotu, tytuł ćwiczenia, numer ćwiczenia i datę wykonania ćwiczenia,
- Układ strony powinien być następujący: marginesy 0,5 cm z każdej strony, czcionka 10,
- Wykresy możliwie małe, ale czytelne, opisane i umieszczone bezpośrednio pod lub obok układu tak, żeby było wiadomo, który przebieg należy do którego układu,
- Sprawozdanie nie powinno być długie, ale powinno zawierać wszystkie niezbędne informacje.

Uwaga: Sprawozdanie należy przysyłać na pocztę lub wskazany przez prowadzącego serwer FTP w formacie PDF zatytułowane w następujący sposób:

NrĆw_Specjalność_NazwiskoImię1_NazwiskoImię2.pdf

na przykład:

0_AM_KowalskiJ_NowakS.pdf
0_MK_WawelskiS_IksińskiZ.pdf
0_RM_ZielonyR_StudentP.pdf

Sprawozdania oddane w innej formie lub z nieprawidłowym opisem nie będą przyjmowane!

Uwaga: Jeśli materiał na ocenę celującą nie jest dołączony do sprawozdania w momencie jego wystania tylko jest dostarczany w terminie późniejszym należy go zatytułować w następujący sposób:

NrĆw_Specjalność_NazwiskoImię1_NazwiskoImię2-dodateknaCEL.pdf

na przykład:

0_AM_KowalskiJ_NowakS-dodateknaCEL.pdf
0_MK_WawelskiS_IksińskiZ-dodateknaCEL.pdf
0_RM_ZielonyR_StudentP-dodateknaCEL.pdf

Dodatki do sprawozdania oddane w innej formie niż pdf lub z nieprawidłowym opisem nie będą przyjmowane!

V. DODATEK:

RMS i wartość średnia

Często spotykane pojęcia wartości średniej oraz wartości RMS napięcia, prądu i mocy (zwłaszcza w systemach audio) powodują pewne nieporozumienia we właściwej fizycznej interpretacji tych wielkości. Poniżej zostały zestawione razem podstawowe definicje oraz znaczenia fizyczne wyjaśniające te pojęcia w prosty i intuicyjny sposób bez użycia zaawansowanej matematyki.

Znaczenie wartości średniej

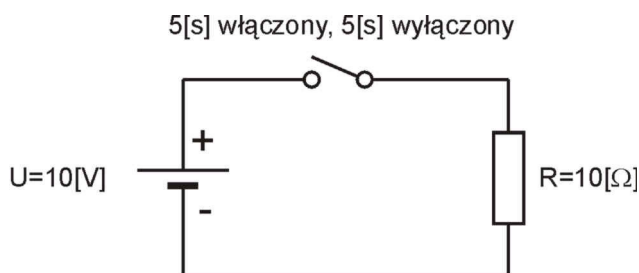
Na samym początku zostanie wyjaśnione pojęcie wartości średniej. Na szczęście znaczenie wartości średniej w przypadku sygnałów okresowych jak na przykład sygnał sinusoidalny jest takie samo jak powszechnie znana definicja wartości średniej, co ułatwia zrozumienie. Jeżeli mamy przykładowy sygnał okresowy (na przykład przebieg napięcia, prądu, mocy itp. w czasie) to możemy taki sygnał spróbkować w czasie, czyli podzielić na równe, niewielkie i stałe odstępy na osi czasu. Następnie sumując wartości sygnału we wszystkich miejscach próbkowania i dzieląc całość przez liczbę próbek otrzymujemy (w przybliżeniu) wartość średnią napięcia, prądu, mocy lub dowolnej wielkości reprezentowanej przez tenże przebieg. Im mniejszy jest odstęp czasu pomiędzy kolejnymi próbkami tym dokładniejsza będzie wyliczona wartość średnia przebiegu. Matematyczna operacja całkowania jest sposobem na znalezienie jaka byłaby wartość średnia jeżeli moglibyśmy podzielić sygnał na nieskończenie wąskie przedziały czasowe (o odstępach pomiędzy próbkami bliskich zeru) i umożliwiła policzenie dokładnej wartości średniej z badanego sygnału. W niniejszym opracowaniu użyta zostanie dla przykładu fala prostokątna, dzięki czemu będzie można w prosty sposób policzyć jej wartość średnią bez używania wzorów matematycznych.

Sygnał okresowy to taki sygnał, który powtarza się cyklicznie w czasie w takiej samej formie. Okres takiego sygnału zwany również jednym cyklem jest czasem, po którym sygnał znów zaczyna się powtarzać. Jeśli znajdziemy średnią wartość jednego pełnego okresu sygnału to ta wartość będzie taka sama jak średnia wartość każdego następnego okresu. Jeśli ponadto obliczymy wartość średnią z dwóch kolejnych cykli (dodając wartości przebiegu z dwóch kolejnych cykli sygnału a następnie dzieląc przez całkowitą liczbę próbek z tych dwóch okresów) to zobaczymy, że wartość średnia z dwóch kolejnych okresów jest dokładnie taka sama jak wartość średnia z jednego okresu. Można zauważyć, że wartość średnia z dowolnej pełnej liczby okresów jest dokładnie taka sama jak wartość średnia z jednego pełnego okresu. Zatem możemy w prosty sposób znaleźć wartość średnią bardzo długiego przebiegu okresowego po prostu obliczając wartość średnią z jednego kompletnego cyklu.

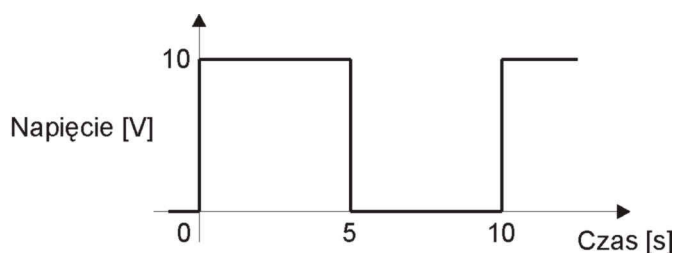
Moc równoważna (ekwiwalentna)

Następnym ważnym zagadnieniem jest pojęcie mocy równoważnej (ekwiwalentnej) zwanej czasami ekwiwalentną mocą grzewczą. Załóżmy, że dostarczamy 5[Wat] mocy do rezystora przez 10 sekund. Całkowita ilość energii dostarczona do rezystora wynosi: $5[W] \times 10[s] = 50[Ws] = 50[J]$. To oczywiście spowoduje wzrost temperatury rezystora o pewną wartość. Rzeczywista wartość wzrostu temperatury w stopniach zależy od tego jak duży jest rezystor, jak szybko energia jest dostarczana oraz jak szybko ciepło może być dystrybuowane do otoczenia przez wypromieniowanie i konwekcję cieplną. Zatem nie będzie tutaj obliczana dokładna wartość wzrostu temperatury, natomiast należy zauważyć fakt, że całkowita wartość energii cieplnej odprowadzanej przez rezystor jest dokładnie równa całkowitej energii elektrycznej doprowadzonej do niego. Wyobraźmy sobie teraz, że rezystor jest zanurzony w izolowanym termicznie pojemniku z wodą. Jeśli dostarczymy do niego energię równą 50[J] temperatura wody wzrośnie o pewną wartość, którą jesteśmy w stanie określić. Nie ma znaczenia w jaki sposób dostarczymy te 50[J] energii – szybko czy wolno – skutek wzrostu temperatury będzie zawsze taki sam jeśli dostarczona energia będzie miała wartość 50[J].

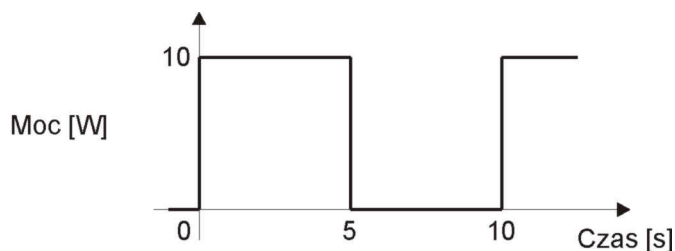
Rozpatrzmy następujący układ elektryczny, w którym przełącznik otwiera się i zamyka okresowo z okresem równym 5 sekund.



Napięcie przyłożone do rezystora będzie wyglądało w następujący sposób:



Moc rozpraszana na rezystorze będzie wyglądała w następujący sposób:



Drugi przebieg przedstawiający moc w czasie pokazuje moc chwilową to znaczy moc dostarczaną do rezystora w każdej chwili czasu. Bardzo często nie zauważa się, że gdy tylko napięcie i/lub prąd zmienia się w czasie moc również się zmienia. Jest oczywiste, że jeżeli przełącznik jest otwarty żadna moc nie jest dostarczana do rezystora. Świadomość tego faktu jest bardzo ważna, ponieważ umożliwia znalezienie bieżącej wartości energii dostarczonej do rezystora jak również obliczenie innych ważnych wielkości.

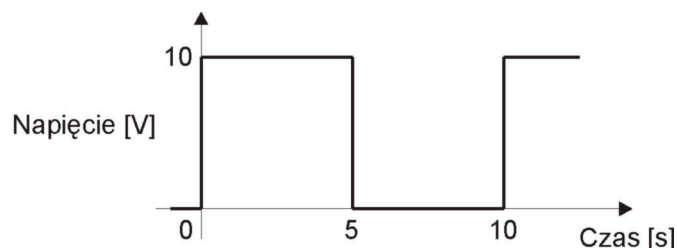
Jak wspomniano powyżej ilość energii dostarczonej do rezystora jest iloczynem mocy i czasu. Ściślej ujmując jest to jednak prawdziwe tylko, jeśli moc jest stała to znaczy niezmienna w czasie. Kiedy moc się zmienia w czasie, energia może być obliczona poprzez spróbkowanie przebiegu mocy w czasie a następnie poprzez obliczenie energii w każdym interwale czasowym (mnożąc wartość mocy przez okres próbkowania dla każdej próbki) a następnie poprzez dodanie wszystkich obliczonych części do siebie. W wyniku dostaniemy wielkość odpowiadającą polu powierzchni zawartej pod wykresem mocy. Wielkość ta będzie tym lepiej odpowiadała rzeczywistej wartości im mniejsze będą kolejne interwały czasowe pomiędzy kolejnymi próbkami czasu. Jeżeli wymagana jest ścisła dokładność obliczeniowa należy sumowanie zastąpić całkowaniem. Jednakże dla rozpatrywanej tutaj prostej fali prostokątnej łatwo zauważyć, że przez pierwsze 5 sekund powierzchnia pod krzywą może być obliczona następująco: $10[\text{W}] \times 5[\text{s}] = 50[\text{Ws}] = 50[\text{J}]$. To jest całkowita energia dostarczona do rezystora w czasie pierwszych pięciu sekund okresu. W czasie kolejnych pięciu sekund moc wynosi zero, zatem dostarczona energia w tym czasie wynosi zero. Całkowita energia dostarczona w czasie jednego okresu wynoszącego 10sekund wynosi $50[\text{J}]$.

Spróbujmy teraz znaleźć średnią moc dostarczoną w całym okresie wynoszącym 10 sekund. Jak łatwo zauważyć średnia moc wynosi $5[\text{W}]$ ($10[\text{W}]$ przez pół okresu i $0[\text{W}]$ przez następne pół okresu). Zatem jeśli spróbkowalibyśmy sygnał w jednakowych odstępach czasu to dokładnie połowa próbek będzie miała wartość

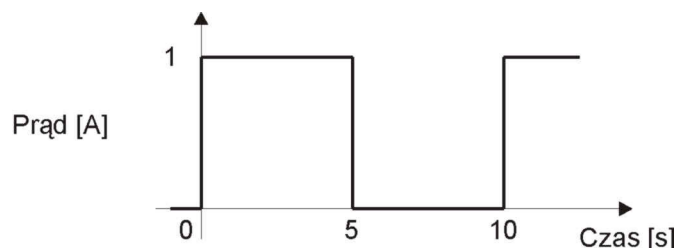
10[W] a druga połowa będzie miała wartość 0[W]. Dzieląc sumę tych wartości przez całkowitą ilość próbek jednego okresu dostaniemy wynik 5[W] jako wartość średnią.

Jeśli dostarczalibyśmy moc równą 5[W] w sposób ciągły przez okres 10 sekund dostarczymy dokładnie 50[J] energii do rezystora. Rezystor rozproszy dokładnie taką samą wartość energii równą 50[J] jak to było w przypadku dostarczania do niego mocy równej 10[W] przez czas równy połowie okresu. **Zatem dla rozpatrywanego układu moc równoważna (ekwiwalentna) wynosi 5[W], co jest jednocześnie mocą średnią.**

Spróbujmy teraz bardziej szczegółowo przyjrzeć się napięciu i prądowi płynącemu w rozpatrywanym układzie. Przywołajmy raz jeszcze przebieg zmian napięcia w czasie:



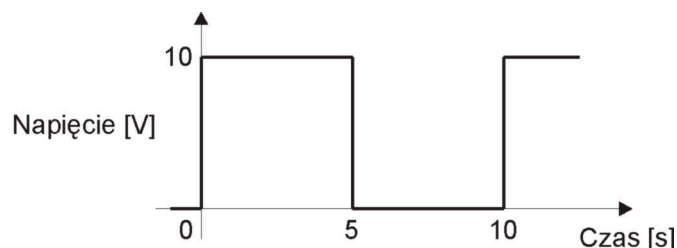
Z prawa Ohma wynika, że przebieg prądu będzie wyglądał w następujący sposób:



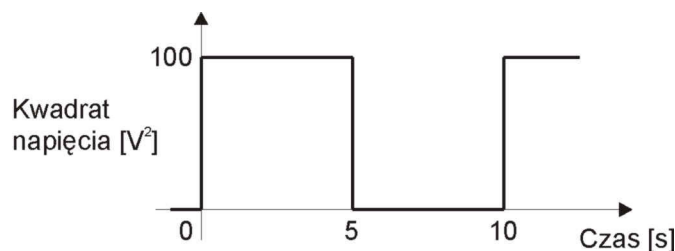
Badając wyżej przedstawione przebiegi można łatwo obliczyć, że wartość średnia napięcia wynosi 5[V] natomiast wartość średnia prądu wynosi 0.5[A]. Jednakże wartość średnia napięcia pomnożona przez wartość średnia prądu ($=2.5[W]$) **NIE** jest wartością średnią mocy! Właściwie ta wielkość jest niezrozumiała i niemająca żadnej fizycznej interpretacji. Należy wykonać dodatkowe pomiary napięcia i prądu, jeśli mamy zamiar obliczyć średnią moc bez znajdowania pełnego przebiegu mocy w czasie.

Znaczenie wartości RMS

Wartość RMS jest matematyczną funkcją, która podobnie jak wartość średnia redukuje złożoną funkcję do pojedynczej wartości. Podobnie jak wartość średnia wartość RMS posiada ścisłą matematyczną definicję. Definicja jest ukryta w nazwie: RMS (Root of the Mean of Square of the function – co oznacza pierwiastek z wartości średniokwadratowej). Zatem aby policzyć wartość RMS dowolnej funkcji lub fali sinusoidalnej kolejno: podnosimy ją do kwadratu, następnie wyliczamy wartość średnią tak otrzymanego przebiegu a następnie obliczamy z niej pierwiastek kwadratowy. Należy przy tym pamiętać o poprawnej kolejności tych operacji! Spróbujmy policzyć wartość RMS okresowego przebiegu napięciowego rozpatrywanego dla wcześniejszego przykładu. Napięcie przedstawione jest w następujący sposób:



Pierwszy krok to podniesienie sygnału do kwadratu:



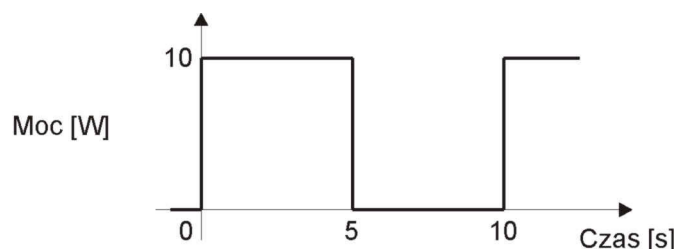
Następnie należy wziąć średnią z tego przebiegu, która będzie wynosiła $50[V^2]$ co widać z przebiegu. Wartość średnia już nie jest przebiegiem czasowym to jest po prostu pojedyncza liczba. W ostatnim kroku obliczamy pierwiastek kwadratowy z tej średniej i dostajemy wynik równy: $7.071.. [V]$. Otrzymana liczba to wartość RMS rozpatrywanego przebiegu napięciowego. Wykonując te same obliczenia dla przebiegu prądowego otrzymujemy wartość RMS prądu równą: $0.7071... [A]$. Okazuje się, że jeżeli pomnożymy te dwie wielkości przez siebie to otrzymamy wynik równy $5[W]$ – czyli **średnią moc**. To jest zawsze prawdziwe dla dowolnego przebiegu prądowego i napięciowego (zakładając dla uproszczenia obciążenie rezystancyjne). Przyczyna pochodzi od prostych matematycznych definicji wartości RMS i wartości średniej. Najłatwiej jest to zobaczyć analizując tylko napięcie albo tylko prąd. Moc chwilowa wynosi: $\frac{V^2}{R}$ gdzie V^2 jest napięciem chwilowym.

Zatem średnia moc wynosi: $Avg\left(\frac{V^2}{R}\right) = \frac{Avg(V^2)}{R}$ (wartość rezystancji R może być wyciągnięta przed średnią,

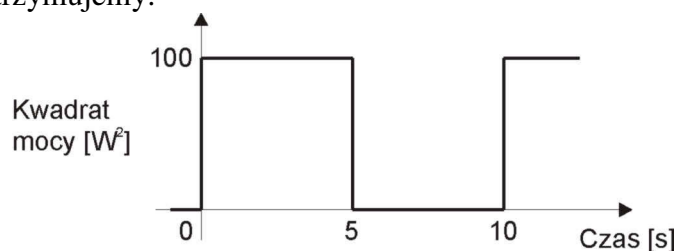
ponieważ R nie zmienia się w czasie). Wartość RMS napięcia wynosi: $V_{RMS} = \sqrt{Avg(V^2)}$, zatem $(V_{RMS})^2 = Avg(V^2)$ i średnia moc może być obliczona jako: $\frac{V_{RMS}^2}{R}$. Podobna analiza matematyczna może być wykonana dla prądu i wynika z niej, że średnią moc możemy obliczyć również stosując wartość skuteczną prądu korzystając z zależności: $I_{RMS}^2 R$. **Fizyczne znaczenie wartości RMS napięcia i prądu jest takie, że pozwala ona bezpośrednio na obliczenie średniej mocy.**

Wartość RMS mocy

Wartość RMS przebiegu mocy może być obliczona tak samo jak wartość RMS dowolnego innego przebiegu, jednakże nie reprezentuje ona mocy traconej na nagrzewanie oporności, ani żadnej innej wielkości fizycznej. Można jednak zaprezentować w jaki sposób policzyć wartość RMS z przebiegu mocy. Przebieg mocy dla rozpatrywanego w naszym przypadku układu ma następujący wygląd:



Podnosząc go do kwadratu otrzymujemy:





Średnia z takiego przebiegu podniesionego do kwadratu wynosi 50[W] natomiast pierwiastek kwadratowy z niej wynosi dokładnie: 7.0711... [W]. Jak zostało pokazane wcześniej równoważna moc grzewcza dla rozpatrywanego układu czyli moc średnia wynosiła 5[W], a nie 7!. **Zatem wartość RMS mocy to nie to samo co ekwiwalentna moc grzewcza i właściwie wartość ta nie reprezentuje żadnej użytecznej wielkości fizycznej.** Praktycznie dla każdego sygnału rozpatrywanego w czasie, wartość średnia i wartość RMS są od siebie różne. Wyjątkiem jest sygnał stały w czasie (na przykład przebieg prądu stałego - DC w czasie), dla którego wartość średnia, wartość RMS i wartość szczytowa są takie same.

Należy zauważyć, że termin moc RMS (RMS Power) jest nadużywany w sektorze sprzętu audio przeznaczonego na rynek konsumencki. W tym kontekście często używany jest on do oznaczania średniej mocy przy wyjściowym sygnale jednotonowym, natomiast właściwie nie jest wartością RMS z mocy.

Podsumowanie

W opracowaniu zostało pokazane, że:

- Ekwiwalentna moc grzewcza sygnału zmiennego w czasie jest mocą średnią tego sygnału,
- Moc RMS to zupełnie coś innego niż moc średnia i wcale nie jest równoważna z ekwiwalentną mocą grzewczą. Właściwie wartość RMS mocy nie reprezentuje żadnej użytecznej wielkości fizycznej,
- Wartości RMS prądu i napięcia są użyteczne, ponieważ mogą być użyte do obliczenia wartości średniej mocy.