# 1 Oszacowania błędu interpolacji

A Lagrange'a w przypadku ogólnym: $\exists \xi \in [x_0, x_n]$ :

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

B Hermite'a w przypadku ogólnym dla węzłów 2-krotnych: $\exists \xi \in [x_0, x_n]$ :

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2, \quad m = 2n + 1.$$

C Lagrange'a z węzłami równoodległymi:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} M_{n+1}, \quad \left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M_{n+1}$$

D Lagrange'a z węzłami w pierwiastkach wielomianu Czebyszewa $x \in [-1, 1]$:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}, \quad \left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M_{n+1}$$

E sześciennej sklejanej:

$$|f(x) - S(x)| \leq 5 M_2 \max_{i=0,\ldots,n-1} h_i^2, \quad \left| f''(x) \right| \leq M_2$$

# 2 Przykładowe wersje interpolacji sklejanej

A Klasyczna sześcienna - wersje 2 warunków „dodatkowych” (brzegowych):

- otwarta - zadane $S_0'(x_0)$ i $S_{n-1}'(x_n)$,
- zamknięta (*clamped/complete*) - $S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$ ,
- *„not-a-knot”* - żądana ciągłość 3. pochodnych w węzłach drugim i przedostatnim. Skutek: funkcje w 2 sąsiednich skrajnych przedziałach są identyczne, czyli „znikają” 2 węzły,
- dla funkcji okresowych - $S_0'(x_0) = S_{n-1}'(x_n)$, $S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n)$.

B Sześcienna Hermite'a, PCHIP (*shape-preserving, monotone*), zmodyfikowana Akina - przykłady na następnej stronie.

# 3 Przykłady innych wielomianowych interpolacji sklejanych

## 3.1 PCHIP - Piecewise Cubic Hermite Interpolation Polynomial

- Nie ma warunku ciągłości 2. pochodnej.
- Oblicza się średnie nachylenie funkcji na odcinku między węzłami

$$\delta_k = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h_k}.$$

- $k-$ty wielomian ma postać:

$$\begin{aligned} P_k(x) = & \frac{3h_k s^2 - 2s^3}{h_k^3} f(x_{k+1}) + \frac{h_k^3 - 3h_k s^2 + 2s^3}{h_k^3} f(x_k) \\ & + \frac{s^2 - (s - h_k)}{h_k^2} P'(x_{k+1}) + \frac{s - (s - h_k)^2}{h_k^2} P'(x_k) \end{aligned}$$

  gdzie $s = x - x_k$.
  Wartści pochodnych $d_k = P'(x_k)$ przyjmuje się wg zasady:

  Przyjąć takie wartości pochodnych w węzłach, aby wartości funkcji interpolującej nie przekraczały wartości w węzłach (przynajmniej lokalnie). Zatem:

  - Jeżeli $\delta_{k-1}$ i $\delta_k$ ą przeciwnego znaku lub jedno z nich (lub obydwa) jest równe zeru, to $d_k = 0$.
  - Jeżeli $\delta_{k-1}$ i $\delta_k$ są tego samego znaku, to obliczamy średnią harmoniczną:

$$\frac{1}{d_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta_{k-1}} + \frac{1}{\delta_k}\right).$$

## 3.2 Metoda Akima i zmodyfikowana Akima

- Akima:
  - Inny (niż w PCHIP) sposób wyznaczania $d_k$ - pochodnej funkcji interpolującej w węzłach:

$$d_k = \frac{w_1}{w_1 + w_2}\delta_{k-1} + \frac{w_2}{w_1 + w_2}\delta_k, \; w_1 = |\delta_{k+1} - \delta_k|, \; w_2 = |\delta_{k-1} - \delta_{k-2}|,$$

  - Właściwość: falowanie mniejsze niż w *spline*, większe niż w PCHIP.
  - Kłopot, gdy $\delta_{k-2} = \delta_{k-1}$ i $\delta_k = \delta_{k+1}$.

- Zmodyfikowana Akima *'makima'*:
  - Modyfikacja wyznaczania pochodnej $d_k$:

$$d_k = \frac{w_1}{w_1 + w_2}\delta_{k-1} + \frac{w_2}{w_1 + w_2}\delta_k,$$

$$w_1 = |\delta_{k+1} - \delta_k| + \frac{|\delta_{k+1} + \delta_k|}{2},$$

$$w_2 = |\delta_{k-1} - \delta_{k-2}| + \frac{|\delta_{k-1} + \delta_{k-2}|}{2}.$$

  - W przypadku 5 kolejnych węzłów „na tej samej wysokości" przyjmuje się pochodną $d_k = 0$ (w środkowym węźle).