1 Ciągi iteracyjne

1.1 Oznaczenia

$\{x_i\}_{i=1}^{n} = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ - ciąg iteracyjny.

$\overline{x}$ - granica zbieżnego ciągu iteracyjnego $\{x_i\}$.

$e_i = x_i - \overline{x}$ - błąd i-tego wyrazu ciągu.

1.2 Wykładnik i stała zbieżności

Jeżeli

$$\exists \lim_{i\to\infty} \frac{|e_{i+1|}}{|e_i|^p} = K$$

to ciąg $\{x_i\}$ jest **zbieżny z wykładnikiem** p **i stałą** K.

1.3 Algorytmy

- iteracji prostej,
- bisekcji,
- siecznych,
- stycznych,
- odwrotnej interpolacji kwadratowej,
- Brenta-Dekkera.

1.4 Metoda Δ^2 Aitkena przyspieszania zbieżności ciągu iteracyjnego o zbieżności liniowej

- $\{x_i\}$ - ciąg zbieżny z wykładnikiem $p = 1$ i stałą K.
- Rozważamy wyrazy ciągu dla $i = n$ dostatecznie dużego, takiego, dla którego iloraz kolejnych błędów dobrze przybliża wartość graniczną K. Wtedy

  $$\frac{x_{n+1} - \overline{x}}{x_n - \overline{x}} \approx K, \quad \frac{x_n - \overline{x}}{x_{n-1} - \overline{x}} \approx K.$$

  Po wyrugowaniu stałej K otrzymujemy przybliżoną wartość $\overline{x}$

  $$\overline{x} \approx x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}} = y_n$$

- W ten sposób budujemy wyrazy ciągu $\{y_n\}$ o przyspieszonej zbieżności - o wykładniku $p = 2$.
- Algorytm Steffensena - praktyczna realizacja algorytmu iteracyjnego z zastosowaniem przyspieszenia Δ^2 - czy warto najpierw obliczyć wszystkie wyrazy ciągu $\{x_i\}$, a później wyrazy ciągu $\{y_n\}$?