Funkcja autokorelacji

1. Wstęp teoretyczny

1.1. Kowariancja

Kowariancja zmiennych losowych X, Y – wartość oczekiwana iloczynu scentrowanych zmiennych x, y:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(x\cdot y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]\cdot f(X,Y)\cdot dX\cdot dY = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$$

Współczynnik korelacji ρ_{XY} zmiennych X i Y to ich kowariancja przeliczona do zakresu [–1, 1]

$$\rho_{XY} = \mathrm{cov}(X,Y)/(\sigma_x\cdot\sigma_y)$$

Współczynnik korelacji przyjmuje wartość 0 gdy zmienne X, Y są niezależne i wartość ±1 gdy są one **zależne liniowo** (ale tylko liniowo, np. X = a+bY, a, b stałe).

UWAGA !
Niezerowe, a nawet wysokie wartości współczynnika korelacji dwóch zmiennych losowych nie oznaczają związku przyczynowo-skutkowego między nimi, a jedynie współzależność stochastyczną, czyli istnienie wspólnych przyczyn dla obu zjawisk

1.2. Proces stochastyczny

Procesem stochastycznym nazywa się zmienną losową sparametryzowaną czasem (ogólnie – dowolną zmienną skalarną).

$$Z = (X, t) = X_t$$

Oznacza to, że *każdej chwili czasu* t_o przypisuje się *zbiór zmiennych losowych* X_{to} (zwany zbiorem możliwych realizacji procesu Z w chwili t_o), z jego wartością oczekiwaną E(X_{to}) i rozkładem prawdopodobieństwa f(X_{to}).
Proces stochastyczny jest zatem szczególnym przypadkiem wielowymiarowej zmiennej losowej i można dla niego definiować wielowymiarowe rozkłady prawdopodobieństwa f(X_{to}, X_{t1}, .. , X_{tN}), a także kowariancje cov(X_{to}, X_{t1}) odpowiadające różnym t_o, t_1 (zwane autokowariancjami lub **funkcjami korelacyjnymi**). Określa się je identycznie jak dla wielowymiarowych zmiennych losowych. Współczynnik korelacji odpowiadający dwóm różnym wartościom t, nazywa się **współczynnikiem autokorelacji** procesu.

1.3. Procesy stacjonarne

Proces stochastyczny jest **stacjonarny w węższym sensie** jeśli wszystkie jego rozkłady prawdopodobieństwa nie zależą od czasu, a jedynie od różnic wartości t_o, t_1, .. , t_N dla których są definiowane.
Zatem jednowymiarowe rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych X_t dla kolejnych t są identyczne, czyli $f(X_t) = f(X)$, a rozkłady dwuwymiarowe $f(X_{t1}, X_{t2})$ zależą tylko od różnicy czasów $\tau = t_2 - t_1$, tzn. $f(X_{t1}, X_{t2}) = f(X, \tau)$.

1.4. Funkcja autokorelacji

Także autokowariancja i współczynnik autokorelacji zależą tylko od τ. Nazywa się je **funkcją korelacyjną** $K_X(\tau)$ *i* **funkcją autokorelacji** $r_X(\tau)$:

$$K_X(\tau) \overset{def}{=} E(X_t \cdot X_{t-\tau}) - (E(X))^2 = E(x_t \cdot x_{t-\tau})$$

$$r_X(\tau) \overset{def}{=} \frac{E(X_t \cdot X_{t-\tau}) - (E(X))^2}{\sigma^2} = \frac{E(x_t \cdot x_{t-\tau})}{\sigma^2}$$

czyli:

$$r_X(\tau) \overset{def}{=} \frac{K_X(\tau)}{\sigma^2}$$

gdzie x_t oznacza proces scentrowany (tj. E(x) = 0).
Wartość funkcji autokorelacji w zerze wynosi zawsze 1, $r(0) = 1$.

Proces stochastyczny jest **stacjonarny w szerszym sensie** jeśli istnieje jego wartość oczekiwana i jest ona stała w czasie, a funkcje korelacyjne zależą tylko od przesunięcia czasu τ (nie zależą od wartości t_o, t_1**):**

$$m_X(t) = E(X_t) = m_X = \text{const}$$
$$K_X(t_1, t_2) = E(x_{t1} \cdot x_{t2}) = K_X(\tau)$$

Zatem procesy stochastyczne stacjonarne mają stałą wartość oczekiwaną, a relacje probabilistyczne między ich wartościami w różnych chwilach czasu są określone (deterministycznie) przez funkcję autokorelacji $r(\tau)$.
Mówimy, że **funkcja autokorelacji** opisuje **właściwości dynamiczne** procesu stochastycznego stacjonarnego, natomiast jego właściwości **chwilowe (statyczne)** charakteryzuje funkcja **gęstości prawdopodobieństwa**, czyli rozkład prawdopodobieństwa.

Im wolniej maleje funkcja autokorelacji, tym mniej losowe są zmiany w czasie procesu, tzn. zmiany te są powodowane głównie wewnętrzną inercją procesu, a nie czynnikami losowymi.

Transformata Fouriera funkcji autokorelacji nazywa się funkcją **gęstości widmowej mocy** procesu lub **spektrum procesu.**

UWAGA:
Funkcje analogiczne jak funkcja korelacyjna mogą być definiowane dla dwu różnych procesów stochastycznych stacjonarnych przesuniętych względem siebie w czasie.

2. Zadanie praktyczne

Głównym zastosowaniem funkcji autokorelacji jest badanie polegające na ustaleniu w jakim stopniu wartość sygnału w pewnej określonej chwili wpływają na wartość tego sygnału w pewnej chwili w przyszłości. Ponieważ w przypadku sygnału zdeterminowanego funkcja autokorelacji "trwa" dla wszystkich przesunięć czasowych – w przeciwieństwie do funkcji autokorelacji procesu losowego, która dąży do zera przy dużych wartościach przesunięcia r. Wobec tego funkcja autokorelacji stanowi dobre narzędzie do wykrywania procesów zdeterminowanych, które mogą być maskowane przez szum losowy.

Oblicz funkcję autokorelacji wg wzoru:

$$R_{xx}(r) = \frac{1}{N-r}\sum_{i=1}^{N-r} x_i x_{i+r} \qquad \text{dla } r = 0,1,\ldots,m-1$$

gdzie: N – liczba próbek sygnału, r – przesunięcie czasowe, dla:
a) sygnału losowego o rozkładzie normalnym,
b) sygnału sinusoidalnego $y = \sin(2\pi f t)$ zakłóconego szumem białym, o wariancji 0.8.

Przyjmij następujące dane: $N = 200$, $m = 100$, $f = 10$, $t = 0.01$.

```
clear
N=200;            %liczba próbek sygnału
m=100;            %liczba przesunięć czasowych
f=10;             %częstotliwość składowej sinusoidalnej sygnału
t=0.01;           %okres sygnału
war=0.8;          %wariancja zakłócenia
sig=sqrt(war);    %odchylenie standardowe zakłócenia

%sygnał losowy i deterministyczny
for i=1:N
    yn(i)=randn;
    y(i)=sin(2*pi*f*t*i)+sig*randn;   %sinus + zakłócenie
end

% funkcja autokorelacji
for r=0:m-1
   sum1=0;
   sum2=0;
   for i=1:N-r
      sum1=sum1+(yn(i)*yn(i+r));
      sum2=sum2+(y(i)*y(i+r));
   end
   kor_yn(r+1)=sum1/(N-r);   %autokorelacja syg. losowego
   kor_y(r+1)=sum2/(N-r);    %autokorelacja syg. deterministycznego
end

% wizualizacja
t=0:m-1;    %wektor "czasu"
subplot(2,2,1)
plot(yn),title('Sygnal losowy')
subplot(2,2,2)
plot(y),title('Sygnal sinusoidalny, zaszumiony')
subplot(2,2,3)
plot(t,kor_yn,'LineWidth',1.5),title('Funkcja autokorelacji')
axis([0 m -0.5 1])
subplot(2,2,4)
plot(t,kor_y,'LineWidth',1.5),title('Funkcja autokorelacji')
axis([0 m -0.5 1])
```

Na podstawie wykresów przedstawiających przebiegi sygnałów trudno ocenić który sygnał jest losowy, a który deterministyczny zakłócony szumem losowym. Natomiast na wykresach funkcji autokorelacji widać to bardzo dobrze: funkcji autokorelacji sygnału deterministycznego ma wyraźny charakter sinusoidalny.