Diagram Shewharta

Diagram Shewharta (ang. *Shewhart Control Chart*) służy do wykrywania on-line wydarzeń takich jak nagła zmiana wartości średniej lub wariancji sygnału.
Główna idea algorytmu polega na tym, że dzieli się sygnał na porcje – każda zawierająca N próbek – a następnie na podstawie każdej porcji obliczana jest reguła decyzyjna aby dokonać wyboru pomiędzy dwiema hipotezami statystycznymi na temat badanego parametru θ sygnału (tj. wartości średniej lub wariancji):

$$\mathbf{H_0} : \theta = \theta_0$$
$$\mathbf{H_1} : \theta = \theta_1$$

Hipoteza H_0 oznacza, że nie nastąpiła istotna zmiana parametru θ i wynosi on θ_0. Hipoteza H_1 oznacza, że nastąpiła istotna zmiana parametru θ i wynosi on teraz θ_1. Dopóki prawdziwa jest hipoteza H_0 test jest kontynuowany dla następnej porcji sygnału. Gdy prawdziwa jest hipoteza H_1 test jest zakończony – nastąpiło wykrycie zmiany w sygnale.
Do obliczenia reguły decyzyjnej stosuje się logarytm z funkcji wiarygodności, definiowany jako:

$$s_i = \ln \frac{p_{\theta_1}(y_i)}{p_{\theta_0}(y_i)} \tag{1}$$

gdzie: $P_\theta(y)$ – rozkład gęstości prawdopodobieństwa,
$P_{\theta_1}(y)$ – prawdopodobieństwo otrzymania y gdy $\theta = \theta_1$.

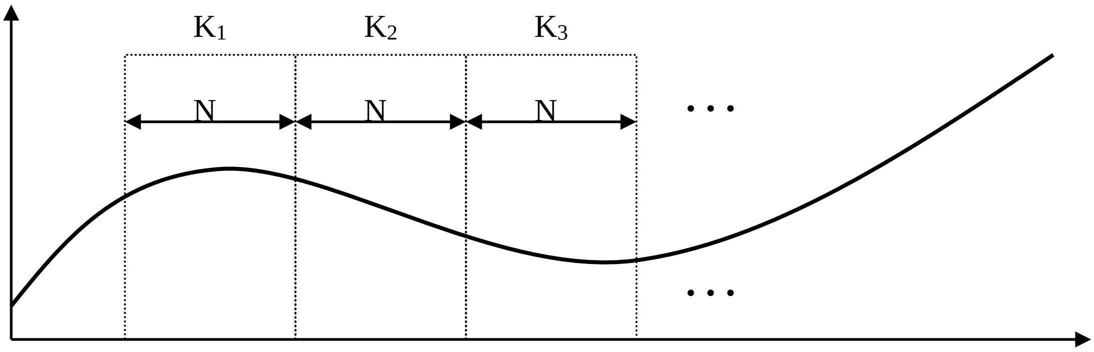
Jeśli $P_{\theta_1}(y) > P_{\theta_0}(y)$ to znaczy, że zaobserwowany y jest bardziej prawdopodobny przy $\theta = \theta_1$.
Funkcję wiarygodności dla obserwacji od y_j do y_k zapisuje się w postaci:

$$S_j^k = \sum_{i=j}^{k} s_i \tag{2}$$

Dla okna obserwacji o długości N próbek reguła decyzyjna przyjmuje postać:

$$d = \begin{cases} 0 \quad gdy \quad S_1^N < h \quad (wybrana\ H_0) \\ 1 \quad gdy \quad S_1^N \geq h \quad (wybrana\ H_1) \end{cases} \tag{3}$$

gdzie h jest wybranym progiem. Suma S_j^k jest *funkcją decyzyjną*.



Rys.1. Sposób dzielenia sygnału na porcje K_1, K_2, K_3, ..., po N próbek każda.

Decyzję podejmuje się za pomocą *reguły stopu*, która w tym przypadku jest następująca:

$$t_a = N \cdot \min\{K: d_k = 1\} \tag{4}$$

gdzie d_k jest regułą decyzyjną dla K-tej porcji sygnału o długości N (patrz rys. 1), a t_a jest czasem alarmu.
Innymi słowy detekcja uznana jest za zakończoną gdy po raz pierwszy podjęta zostanie decyzja $\mathbf{H_1}$.

Przykład. Wykrywanie zmiany wartości średniej.

Zakładamy że sygnał jest gaussowskim szumem białym o wartości średniej μ i wariancji σ^2. W tym przypadku badanym parametrem θ będzie μ. Gęstość prawdopodobieństwa wynosi:

$$p_\theta(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \tag{5}$$

a statystyka s_i:

$$s_i = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \left(y_i - \frac{\mu_1 + \mu_0}{2} \right) \tag{6}$$

co można zapisać jako:

$$s_i = \frac{b}{\sigma} \left(y_i - \frac{\mu_1 + \mu_0}{2} \right) = \frac{b}{\sigma} \left(y_i - \mu_0 - \frac{\nu}{2} \right) \tag{7}$$

gdzie $\nu = \mu_1 - \mu_0$ jest skokiem wartości średniej, a $b = \nu/\sigma$ jest stosunkiem sygnału do szumu.
Wartość średnia po skoku jest w tym przypadku nieznana, więc trzeba ją oszacować jako:

$$\mu_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=N(K-1)+1}^{NK} y_i \tag{8}$$

Funkcja decyzyjna przybiera zatem postać:

$$S_1^N = \frac{b}{\sigma} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \mu_0 - \frac{\nu}{2} \right) \tag{9}$$

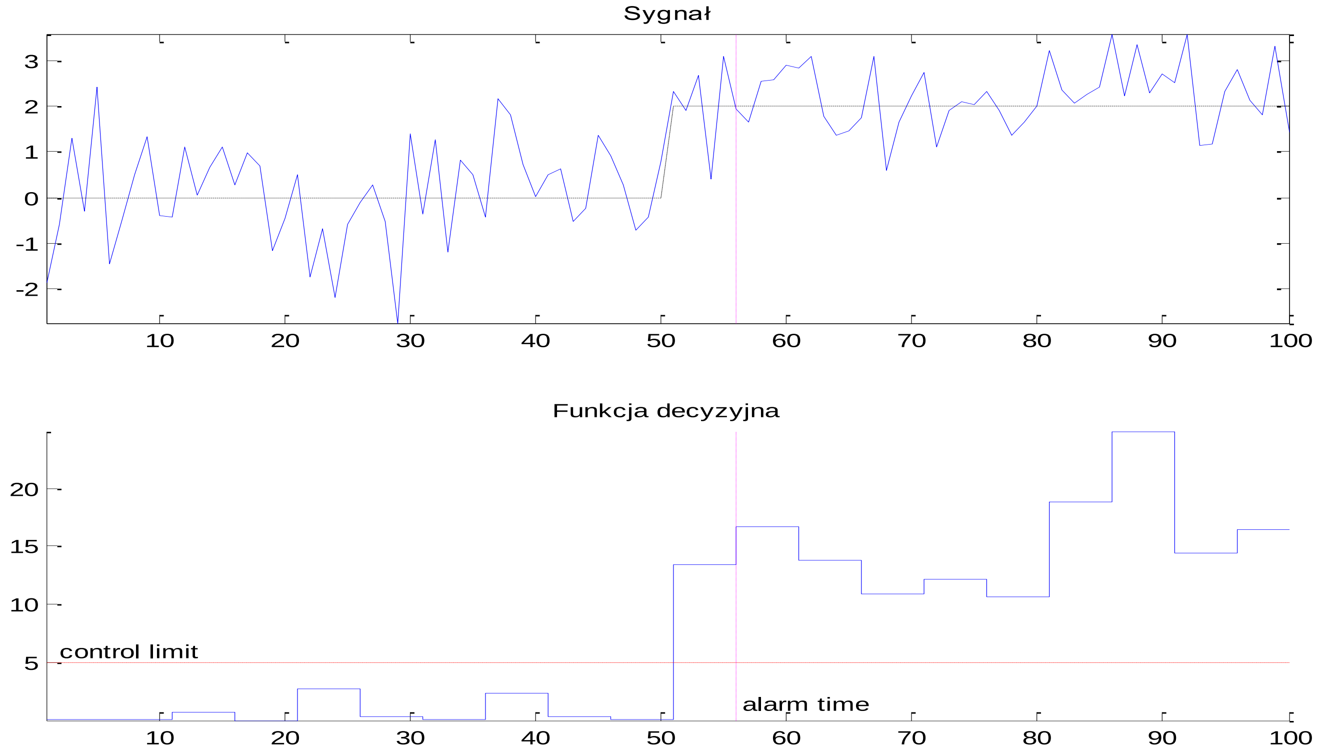
Reguła decyzyjna wynosi:

$$d = \begin{cases} 0 & gdy \quad S_1^N(K) < h \\ 1 & gdy \quad S_1^N(K) \geq h \end{cases} \tag{10}$$

gdzie:

$$S_1^N(K) = S_{N(K-1)+1}^{NK} \tag{11}$$

Przykład działania tej metody jest pokazany na rysunku 2.



Rys. 2. Diagram Shewharta dla sygnału gaussowskiego w przypadku zmiany wart. średniej.

Wykonanie ćwiczenia

Na zajęciach należy wygenerować sygnał skokowy zakłócony szumem białym (jak na rys. 2.) i narysować dla niego diagram Shewharta. Sprawdzić działanie tego algorytmu jako detektora skokowych zmian w sygnale dla różnych wartości skoku i wariancji zakłócenia.

Przygotuj dane wejściowe:

```
sig=0.5;      %odchylenie standardowe
war=sig^2;    %wariancja
m0=0;         %wartość średnia przed skokiem
m1=1;         %wartość średnia po skoku
D=50;         %połowa długości sygnału
N=5;          %szerokość okna
h=5;          %próg czułości testu
```

Przygotuj sygnał testowy:

```
zad=[zeros(1,D)+m0,zeros(1,D)+m1];           %sygnał
y=[sig*randn(1,D)+m0,sig*randn(1,D)+m1];     %sygnał + zakłócenie
dl=length(y);                                %długość sygnału
```

Główna pętla programu:

```
K=0;
flaga=0;
for k=1:dl
    suma=0;
    if rem(k,N)==0      %zwiększamy K tylko po N próbkach sygnału
        K=K+1;
        m1est=sum(y((N*(K-1)+1):(N*K)))/N;  %estymacja wartości
                                            %średniej po skoku
        for i=(N*(K-1)+1):(N*K)
            suma=suma+y(i)-m0-(m1est-m0)/2; %suma pomocnicza
        end

        S(K)=(m1est-m0)/war*suma;           %funkcja decyzyjna
        if (S(K)>=h & flaga==0)
            alarm=K; flaga=1;               %czas alarmu
        end
    end
end
```

Dane do wizualizacji:

```
alarm=alarm*N+1;    %faktyczny czas alarmu
ES=zeros(N,K);      %macierz K porcji po N próbek
for i=1:K
    ES(:,i)=S(i);   %wypełnienie wartościami funkcji decyzyjnej
end
ES=ES(:);           %macierz na wektor
mi=min(ES); ma=max(ES); %granice wykresu
miy=min(y); may=max(y);
```

Wizualizacja:

```
subplot(2,1,1)
plot(1:dl,y,1:dl,zad,'k-.',[alarm alarm],[miy may],'m:')
title('Sygnał','FontName','MS Sans Serif')
axis([1 dl miy may])

subplot(2,1,2)
hold on
stairs(ES)
plot([0 dl],[h h],'r--',[alarm alarm],[mi ma],'m:')
hand1=text(2,h,'control limit');
hand2=text(alarm+0.5,mi+0.5,'alarm time');
set(hand1,'VerticalAlignment','bottom');
set(hand2,'VerticalAlignment','bottom');
title('Funkcja decyzyjna')
axis([1 dl mi ma])
hold off
```