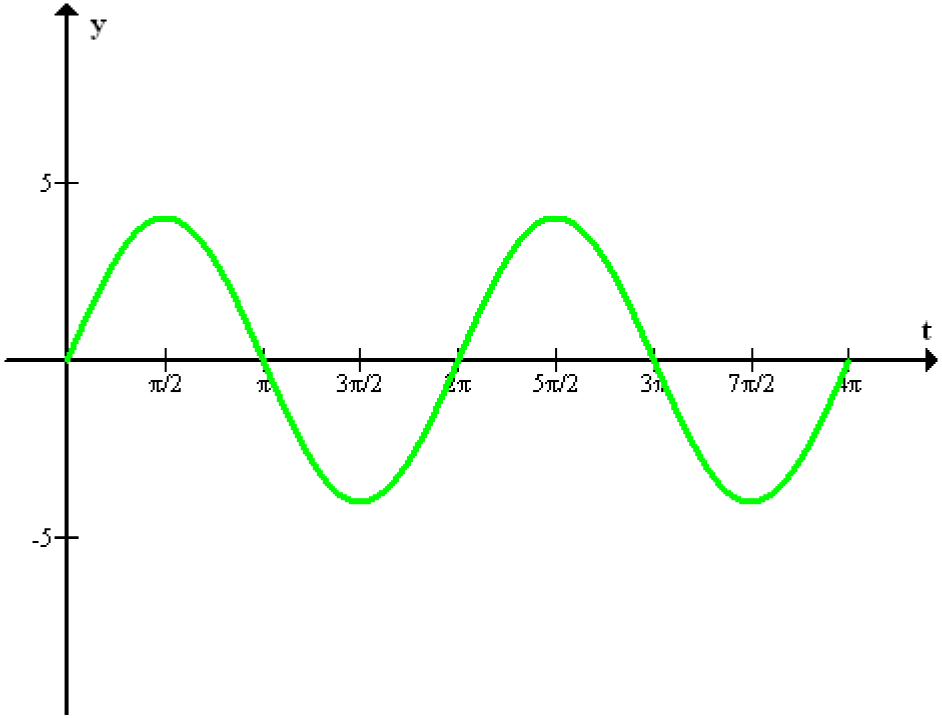
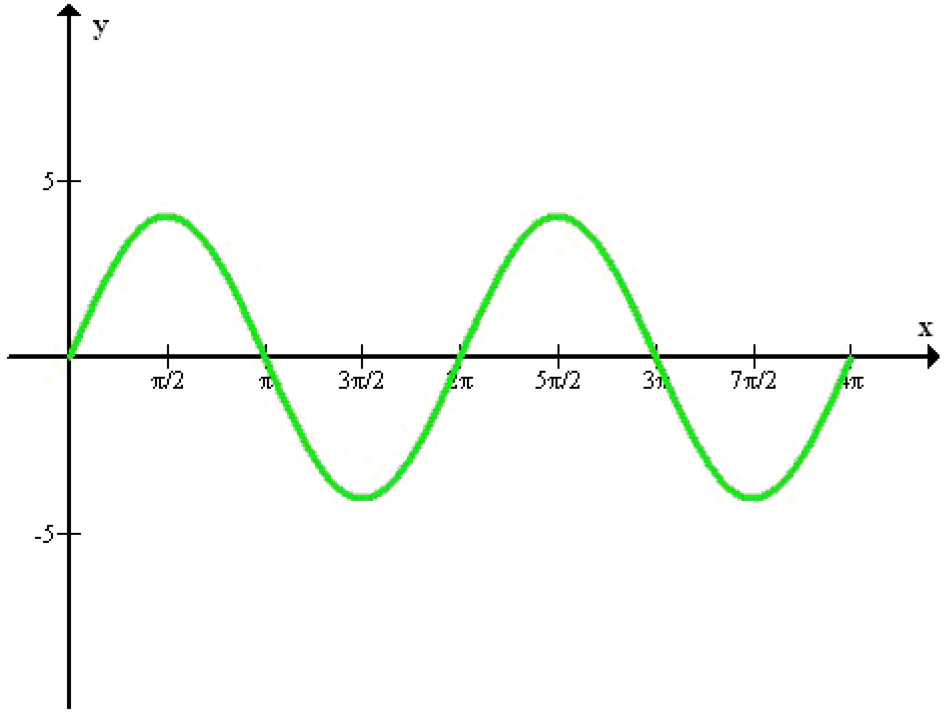
Fale rzeczywiste

dudnienia i prędkość grupowa

Czysta fala harmoniczna nie istnieje.

Rzeczywisty impuls falowy jest skończony w czasie i w przestrzeni:





Rzeczywisty impuls falowy (ciąg falowy) można przedstawić jako superpozycję pewnej liczby (na ogół nieskończonej) fal harmonicznych.

Rozważmy superpozycję 2 fal płaskich o tych samych amplitudach, o nieznacznie różniących się ω i k, biegnących wzdłuż tej samej prostej

$$y_1 = A\cos(\omega_1 t - k_1 x)$$

$$y_2 = A\cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right)\cos(\omega_{\text{śr}} t - k_{\text{śr}} x)$$

gdzie

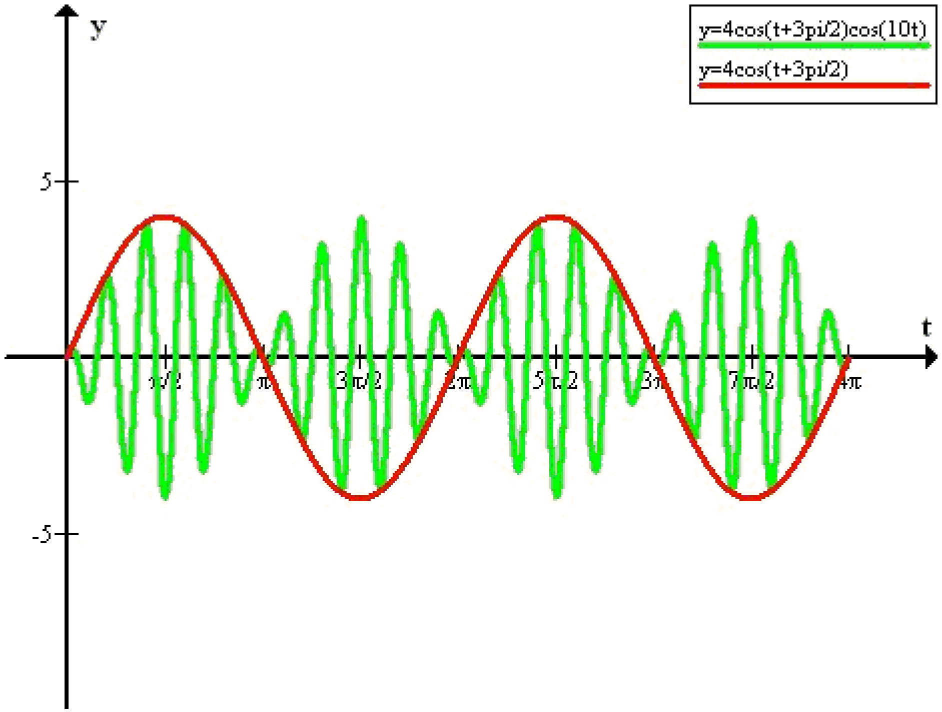
$$\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|, \qquad \Delta k = |k_1 - k_2|$$

$$\omega_{\text{śr}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \qquad k_{\text{śr}} = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Jest to fala harmoniczna o modulowanej amplitudzie.

W ustalonym miejscu ($x = const$) jest to drganie harmoniczne o modulowanej amplitudzie - dudnienie.

$$y = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \varphi_1\right)\cos\left(\omega_{\acute{s}r}\,t - \varphi_2\right)$$



Przykład: fala akustyczna – obserwator w miejscu *x* usłyszałby dźwięk o okresie T=2π/10, modulowany z okresem T_{mod}=$\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$, czyli dudnienie.

Widzimy, że impulsy (grupy fal ograniczone z dwóch stron przez zerową amplitudę) przesuwają się z jakąś prędkością.

Superpozycja

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\cos(\omega_{\text{śr}}\, t - k_{\text{śr}}x)$$

opisuje przesuwanie się „paczek energii”, ponieważ energia jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy

Znajdźmy prędkość przesuwania się powierzchni falowej o stałej amplitudzie:

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x = const$$

Jest to równanie ruchu tego zespołu (grupy) fal

$$x = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t + const'$$

Prędkość tej grupy fal

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

nazywamy prędkością grupową.

Ogólnie:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Prędkość grupowa jest pojęciem ważnym także dla techniki. Wszelkie sygnały rozchodzą się z prędkością grupową.

Jeżeli v_f **nie zależy od** λ**, to prędkość fazowa jest równa prędkości grupowej.**

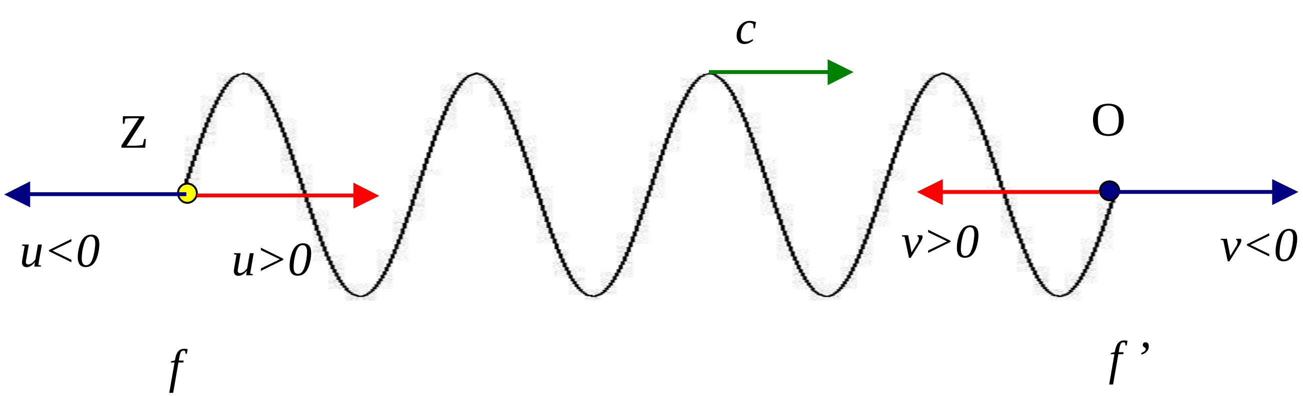
Przykłady sytuacji, gdy prędkość fazowa jest równa prędkości grupowej:

- **fale dźwiękowe w powietrzu**
- **fale poprzeczne w strunie**
- **fale elektromagnetyczne w próżni (np. światło).**

Są to przypadki szczególne.

Efekt Dopplera dla fali akustycznej

polega na zmianie obserwowanej częstości dźwięku, względem <u>znanej</u> częstości źródła, wskutek ruchu źródła lub obserwatora względem ośrodka.



Dane: *f*, *c*, *u*, *v* **(tutaj *c* – prędkość dźwięku względem powietrza)**
Szukane: *f ’*
Oznaczenia: Z – źródło, O – obserwator.

Jeżeli nie ma ruchu Z ani O, to $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$ **,** $f' = f$

I. Z nieruchome, O zbliża się do Z

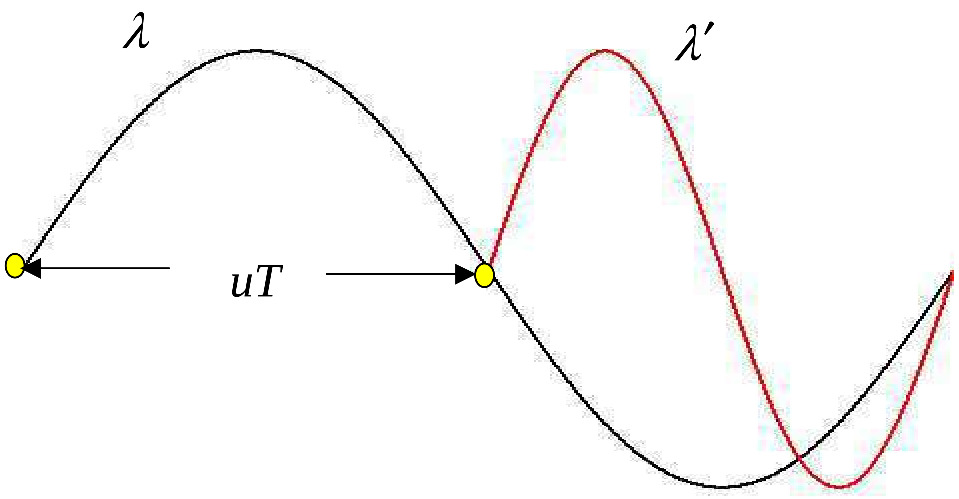
$u = 0$**,** $v > 0$ $\Rightarrow$ **prędkość względna fali i obserwatora jest większa od *c***

$$\begin{cases} c + v = \lambda f' \\ c = \lambda f \end{cases} \Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{c+v}{c}$$

$$f' = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f$$

II. O nieruchomy, Z zbliża się do O

$u > 0$, $v = 0$ $\Rightarrow$ **źródło dogania impulsy, fala się skraca**



$$c = \lambda' f' = (\lambda - uT) f' = (cT - uT) f' = (c-u)Tf' = (c-u)\frac{f'}{f}$$

$$f' = \frac{c}{c-u} f$$

III. Z i O zbliżają się do siebie

$u \neq 0$, $v \neq 0$

$$f' = \frac{c+v}{c} \frac{c}{c-u} f$$

$$f' = \frac{c+v}{c-u} f$$

Wzory te są słuszne dla prędkości źródła i obserwatora mniejszych od prędkości dźwięku.

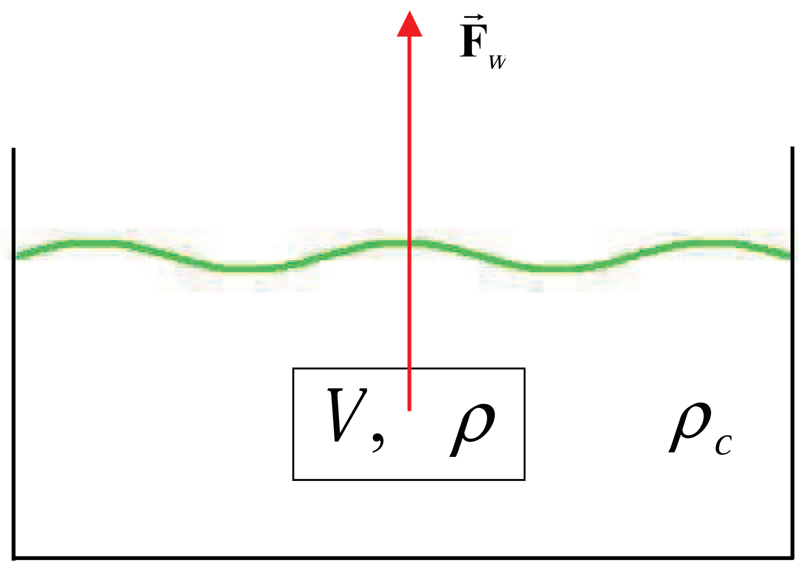
Mechanika płynów

Hydrostatyka

Hydrodynamika

Prawo Archimedesa:

Na każde ciało zanurzone w cieczy działa siła wyporu, skierowana ku górze, równa co do wielkości ciężarowi cieczy wypartej przez to ciało.

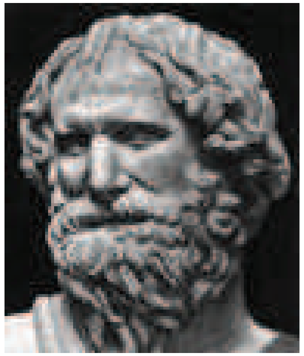


$$\boxed{F_w = \rho_c V g}$$

Warunek pływania ciał:

$$F_w \geq mg$$
$$\rho_c V g \geq \rho\, V g$$
$$\rho_c \geq \rho$$

Zastosowanie: łodzie, statki, balony.



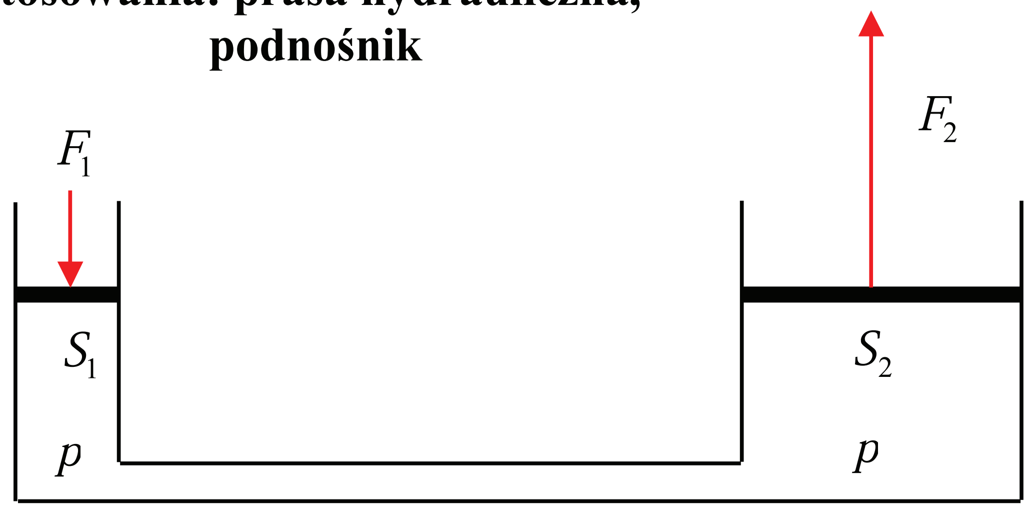
Archimedes (287-212 p.n.e)

Jego prawo pozwala zmierzyć gęstość ciała przez dwukrotne zważenie, np. w powietrzu i w wodzie (korona Herona).

Prawo Pascala:

Ciśnienie wywarte na ciecz rozchodzi się równomiernie we wszystkich kierunkach.

Zastosowania: prasa hydrauliczna,
podnośnik



$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

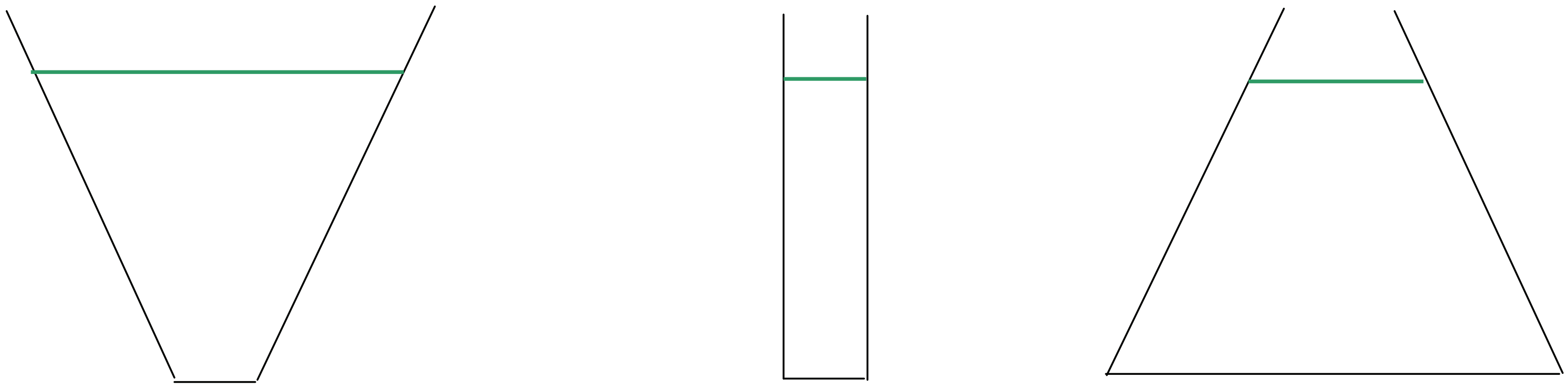
$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$$

Blaise Pascal (1623-1662)

Ciśnienie hydrostatyczne

$$\boxed{p = \rho\, g\, h}$$

Paradoks hydrostatyczny



Ciśnienie na dnie naczynia nie zależy od kształtu tego naczynia, lecz od wysokości słupa cieczy.

Hydrodynamika

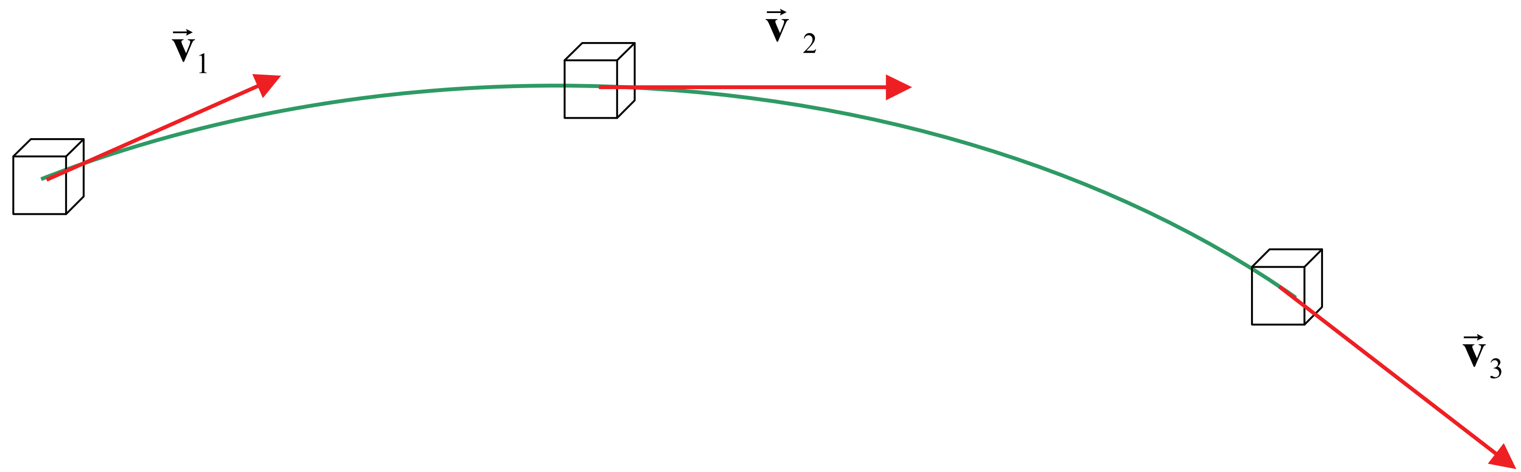
Ruch cieczy idealnej

Założenia:

- **ciecz jest nieściśliwa i nielepka**
- **przepływ jest ustalony i bezwirowy**

Definicje:

- **cząstka płynu – myślowo wyodrębniony element objętości**
- **linia prądu – linia, do której wektor prędkości wybranej cząstki płynu jest w każdym punkcie styczny**
- **struga prądu – obszar w cieczy utworzony przez pewien ciągły zbiór linii prądu**



W dalszych rozważaniach będziemy wiązać prędkość z punktem w przestrzeni, a nie z konkretną cząstką płynu.

Równanie ciągłości

Przepływ masy w tym samym czasie Δt

przez A_1 **:** $\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 v_1 \Delta t A_1$

przez A_2 **:** $\Delta m_2 = \rho_2 \Delta V_2 = \rho_2 v_2 \Delta t A_2$

Prawo zachowania masy:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2$$

stąd

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

$$\boxed{\rho A v = const}$$

Strumień masy jest stały.

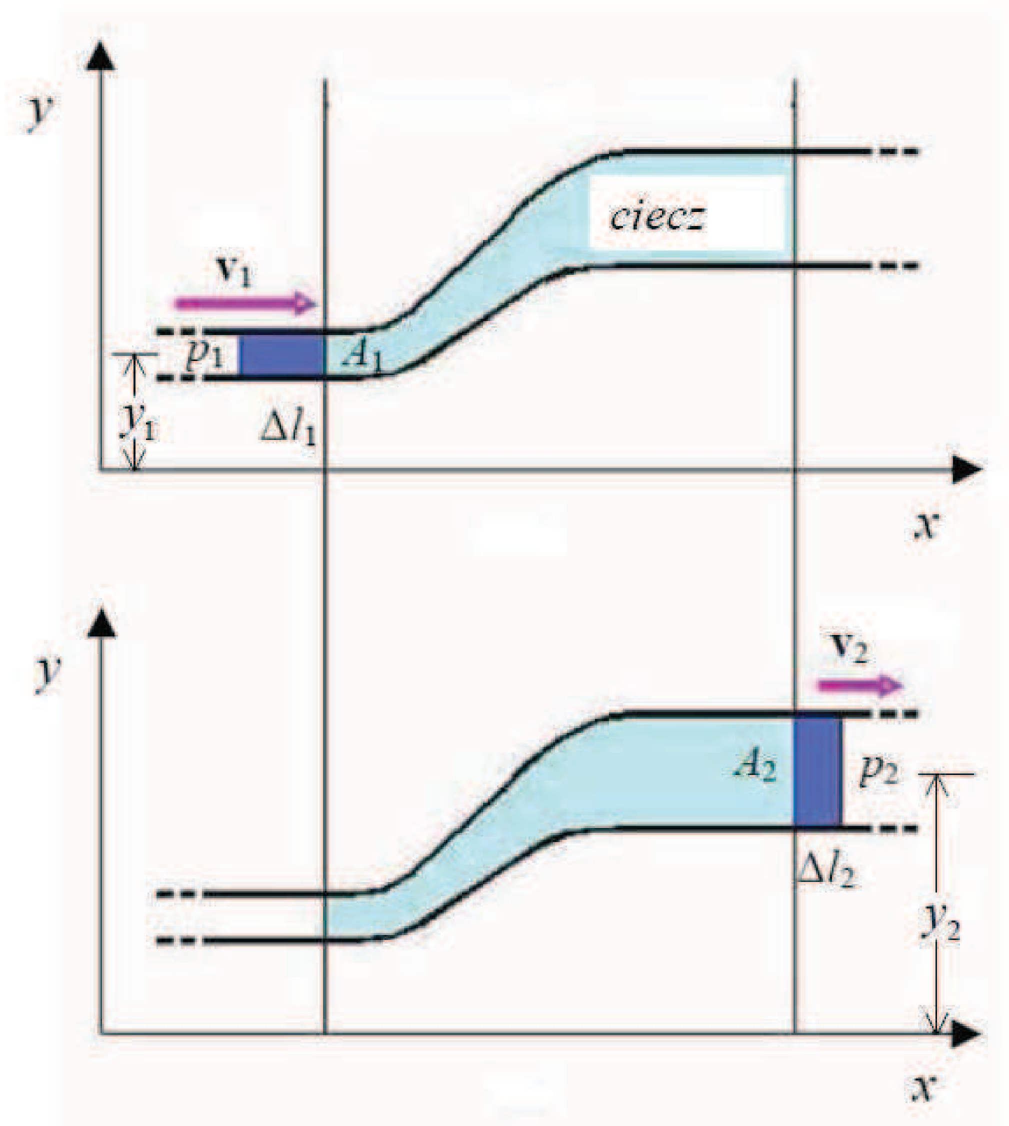
Jeżeli ciecz jest nieściśliwa $\rho_1 = \rho_2$

to

$$\boxed{A v = const}$$

Natężenie przepływu jest stałe.

Równanie Bernoulliego



$$\boxed{p + \rho g y + \frac{\rho\, v^2}{2} = const}$$

wynika ze związku między pracą i energią:

$$W = \Delta E_p + \Delta E_k$$

$$W = p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2$$

$$\Delta E_p = mgh = mgy_2 - mgy_1$$

$$\Delta E_k = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

$$p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2 = mgy_2 - mgy_1 + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

$$p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \rho \Delta V g y_2 - \rho \Delta V g y_1 + \frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} - \frac{\rho \Delta V v_1^2}{2}$$

$$p_1 - p_2 = \rho g y_2 - \rho g y_1 + \frac{\rho\, v_2^2}{2} - \frac{\rho\, v_1^2}{2}$$

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{\rho\, v_1^2}{2} = p_2 + \rho g y_2 + \frac{\rho\, v_2^2}{2}$$

definicje:

$p + \rho g y$ **- ciśnienie statyczne**

$\dfrac{\rho v^2}{2}$ **- ciśnienie dynamiczne**

Słowne sformułowanie prawa Bernoulliego:

suma ciśnienia statycznego i dynamicznego jest wielkością stałą.

Zastosowania:

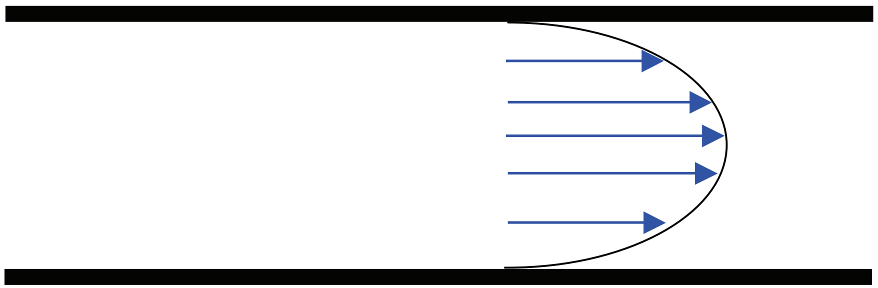
1. **pomiar prędkości cieczy i gazów w rurach**
2. **siła nośna skrzydła samolotu**
3. **rozpylacze aerozoli**

Daniel Bernoulli
(1700-1782)

Ruch cieczy lepkiej

W rzeczywistej cieczy istnieją oddziaływania międzycząsteczkowe.
Ciecz oddziałuje ze ściankami rury i z przedmiotami w niej zanurzonymi.
Warstwy cieczy oddziałują ze sobą.

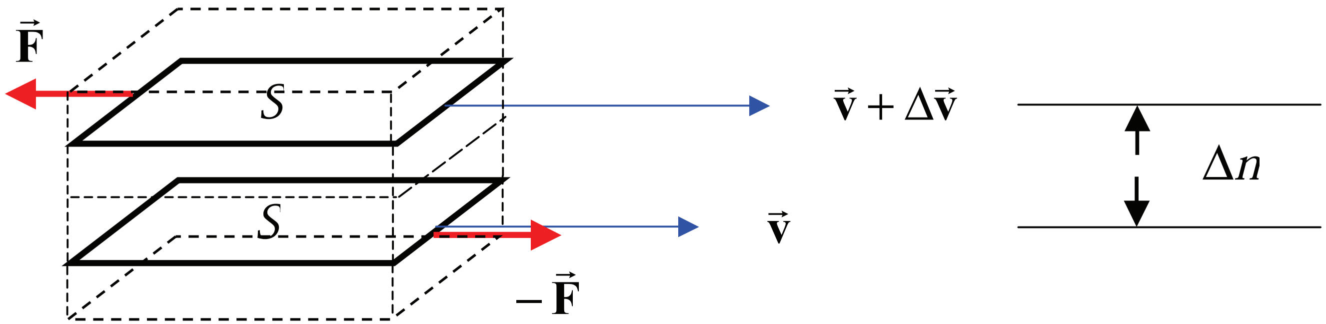
Przepływ cieczy przez rurę:



niebieskie strzałki – wektory prędkości

na styku ze ścianką rury $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$

Prawo Newtona dla lepkości



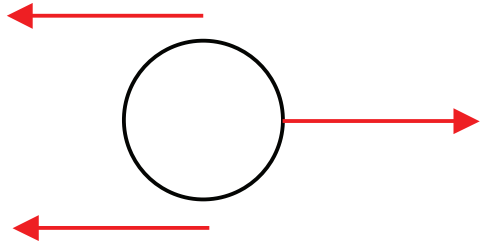
$$\frac{F}{S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta n}, \text{ a w granicy } \frac{F}{S} = \eta \frac{dv}{dn}$$

η **- współczynnik lepkości dynamicznej**

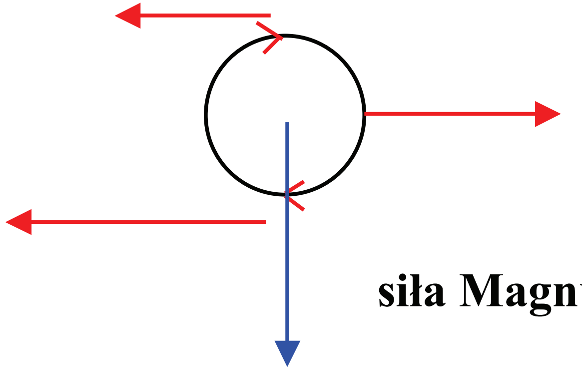
Przykład na zastosowanie równania Bernoulliego do płynu wykazującego lepkość:

strzelanie bramek z kornera lub obok muru (efekt Magnusa).

Lot piłki bez rotacji:



lot piłki z nadaną rotacją – wskutek lepkości powierzchnia piłki porywa cząsteczki powietrza, dlatego prędkość powietrza względem piłki po obu stronach nie jest taka sama:



|v| mniejsze, p_{dyn} mniejsze, p_{stat} większe

|v| większe, p_{dyn} większe, p_{stat} mniejsze

siła Magnusa