Mnożenie macierzy

Maciej Paszyński

Katedra Informatyki
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
home.agh.edu.pl/paszynsk

Jeśli używasz fragmentów tego wykładu, zacytuj źródło

Wprowadzenie

1. Wykład składa się z dwóch części: Rachunek macierzowy oraz Statystyka wielowymiarowa
2. Zaliczenie części z Rachunku Macierzowego polegać będzie na napisaniu kilku programów w Octavie oraz na rozwiązaniu kilku zadań pisemnych.
3. Na początku każdego wykładu od 28 lutego do 3 kwietnia będę zadawał do rozwiązania jedno zadanie. Na końcu każdego wykładu będę zbierał rozwiązania zadanych wcześniej zadań. Ostatni raz zadanie zostanie zadane 3 kwietnia. Zadania można oddać maksymalnie pod koniec wykładu mającego miejsce 3 tygodnie od zadania.
4. Zadania oceniane będą zero-jedynkowo, w sumie można więc zebrać 6 punktów. Konieczne jest zapisanie obliczeń.
5. Proszę przynieść na ćwiczenia laptopy z zainstalowanym Octave. Na ćwiczeniach będziemy pisać programy w grupach 2-3 osobowych. Niektóre programy będą używały poprzednich. Zadania z wykładu będą pomagać zrozumieć programy z ćwiczeń. Wszystko będzie powiązane w pewną całość.

Wprowadzenie

1. Na każdych ćwiczeniach będzie zadawany prosty program do napisania w grupie 2-3 osobowej, oraz będzie możliwość pokazania napisanych wcześniej programów. W sumie zadanych zostanie 6 programów od 28 lutego do 3 kwietnia. Program można oddać maksymalnie do 3 tygodni po ich zadaniu, na ćwiczeniach mających miejsce 3 tygodnie po zadaniu programu.
2. Oceny z programów będą zero-jedynkowe. Program albo daje poprawne wyniki albo nie, z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku.
3. $\text{Ocena} = MIN\{(Programy \in [0-6] + Zadania \in [0-6])/2, 5\}$
4. Zadania zadawane na wykładach nie są obowiązkowe. Możliwe jest uzyskanie zaliczenia z tej części punktów poprzez napisanie jednego dużego (90 minut) kolokwium zaliczeniowego pisemnego na przełomie kwietnia / maja.
5. Konsultacje: wtorki od 16.30 do 18.00 po uprzednim umówieniu e-mailowym

Dzisiejsze zadanie

Proszę przemnożyć macierze

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = ? \tag{1}$$

1) algorytmem klasycznym mnożenia wierszy przez kolumny (slajd 13)
2) jako złożenie mnożenia macierzy przez dwa wektory (slajd 16)

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \right] \tag{2}$$

3) jako suma dwóch rank-1 update (slajd 19)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \tag{3}$$

4) algorytmem Strassena (slajd 44)
Proszę sprawdzić czy algorytmy dają taki sam wynik.
Ile operacji dodawania / mnożenia wymagają te algorytmy dla

Pierwsze macierze na świecie, Tybet 650 rok p.n.e.

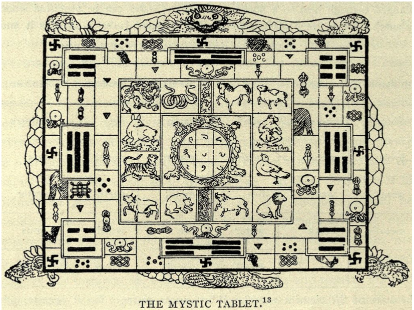


Figure: Magiczny kwadrat Lou Schu narysowany na plecach żółwia, antyczny rysunek z Tybetu (pierwsze znane macierze rozmiaru 3 na 3)

Magiczne Kwadraty Lou Shu z 650 rok p.n.e., reprezentowały macierze o rozmiarze 3 na 3.
Do roku 1275 naszej ery wspominano jedynie o magicznych kwadratach rzędu 3 (nie większych) ponieważ traktowano je jako obiekty magiczne, i zwiększanie ich rozmiaru nie było wskazane.

Pierwsze macierze na świecie, Tybet 650 rok p.n.e.

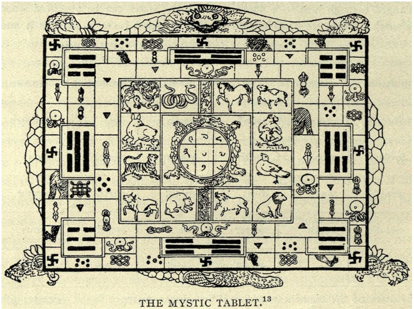


Figure: Magiczny kwadrat Lou Schu narysowany na plecach żółwia, antyczny rysunek z Tybetu (pierwsze znane macierze rozmiaru 3 na 3)

Wszystkie sumy wierszy i kolumn dają 15

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Pierwsza tabliczka mnożenia, Chiny 305 rok p.n.e.

Pierwsza tabliczka mnożenia, Chiny 305 rok p.n.e.

1/2	1	2	3	(4)	(5)	6	7	8	9	10	20	(30)	40	50	60	70	80	90		
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
45	90	180	270	(360)	(450)	540	630	720	810	900	1800	2700	3600	4500	5400	6300	7200	8100	•	90
40	80	160	240	(320)	(400)	480	560	640	720	800	1600	2400	3200	4000	4800	5600	6400	7200	•	80
35	70	140	210	280	350	420	490	560	630	700	1400	2100	2800	3500	4200	4900	5600	6300	•	70
30	60	120	180	240	300	360	420	480	540	600	1200	1800	2400	3000	3600	4200	4800	5400	•	60
25	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	•	50
20	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200	3600	•	40
15	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400	2700	•	30
10	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	•	20
5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	•	10
$4\frac{1}{2}$	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	180	270	360	450	540	630	720	810	•	9
4	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	160	240	320	400	480	560	640	720	•	8
$3\frac{1}{2}$	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	140	210	280	350	420	490	560	630	•	7
3	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	120	180	240	300	360	420	480	540	•	6
$2\frac{1}{2}$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	100	150	200	250	300	350	400	450	•	5
2	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	80	120	160	200	240	280	320	360	•	4
$1\frac{1}{2}$	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	60	90	120	150	180	210	240	270	•	3
1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	40	60	80	100	120	140	160	180	•	2
1/2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90	•	1
1/4	1/2	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	•	1/2

Antyczny kalkulator, Chiny, 305 rok p.n.e. , tłumaczenie

Przykład:

22.5 x 35.5 rozbijamy na (20 + 2 + 0.5) x (30 + 5 + 0.5) =
20 x 30 + 20 x 5 + 20 x 0.5 + 2 x 30 + 2 x 5 + 2 x 0.5 + 0.5 x 30 + 0.5 x 5 + 0.5 x 0.5

i każde z tych działań można odczytać z tabliczki

Pierwsze mnożenie macierzy

Mnożenie macierzy zostało po raz pierwszy opisane w 1812 roku przez francuskiego matematyka, fizyka i astronoma Jacques Philippe Marie Binet'a (urodzony 2 lutego 1786 w Rennes, pracował na Ecole Politechnique w Paryżu, zmarł 2 maja 1856 w Paryżu)

1813: Mémoire sur un système du formules analytiques and leur application à des thinkérations géométriques (J. l'École Polytechnique Vol. 9 : 280 - 354)

Wektory z $\mathcal{R}^2$ i macierze z $\mathcal{R}^{2\times 2}$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix} = ?$$

Rank-1 update

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}^T = ?$$

Iloczyn skalarny wektorów (macierzy jednowymiarowych)

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} = ? \qquad \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}^T = ?$$

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} = ? \qquad \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} = ?$$

Mnożenie wektorów

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) * (-1) + 0 * 2 + 2 * 1 = 3$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów

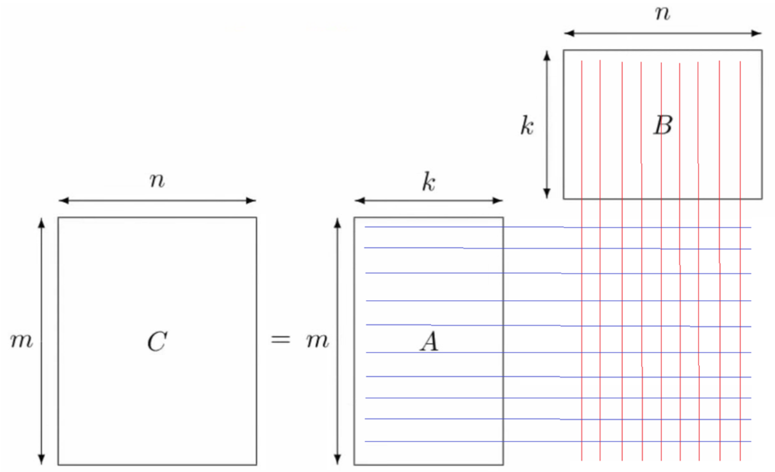
Wektory z $\mathcal{R}^3$ i macierze z $\mathcal{R}^{3\times 3}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) * (-1) + 0 * 2 + 2 * 1 \\ 2 * (-1) + (-1) * 2 + 1 * 1 \\ 3 * (-1) + 1 * 2 + 1 * 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy i wektorów jako złożenie mnożenia wielu wektorów

$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy



Mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3*1+(-1)*2+2*(-3) & 3*0+(-1)*(-1)+2*3 \\ 1*1+0*2+(-2)*(-3) & 1*0+0*(-1)+(-2)*3 \\ (-2)*1+1*2+3*(-3) & (-2)*0+1*(-1)+3*3 \\ 0*1+(-1)*2+(-3)*(-3) & 0*0+(-1)*(-1)+(-3)*3 \end{bmatrix}$$

Mnożenie dwóch macierzy jako złożenie mnożenia macierzy przez wiele wektorów

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 3*1+(-1)*2+2*(-3) & 3*0+(-1)*(-1)+2*3 \\ 1*1+0*2+(-2)*(-3) & 1*0+0*(-1)+(-2)*3 \\ (-2)*1+1*2+3*(-3) & (-2)*0+1*(-1)+3*3 \\ 0*1+(-1)*2+(-3)*(-3) & 0*0+(-1)*(-1)+(-3)*3 \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy

Mnożenie dwóch macierzy jako złożenie mnożenia wielu wektorów

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy

Mnożenie dwóch macierzy jako złożenie mnożenia wielu wektorów

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy

Mnożenie dwóch macierzy jako SUMA wielu rank-1 updates

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} 3*1 & 3*0 \\ 1*1 & 1*0 \\ (-2)*1 & (-2)*0 \\ 0*1 & 0*0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-1)*2 & (-1)*(-1) \\ 0*2 & 0*(-1) \\ 1*2 & 1*(-1) \\ (-1)*2 & (-1)*(-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2*(-3) & 2*3 \\ (-2)*(-3) & (-2)*3 \\ 3*(-3) & 3*3 \\ (-3)*(-3) & (-3)*3 \end{bmatrix}$$

Implementacja mnożenia macierzy I

$$C = A * B \quad A \in \mathcal{R}^{m \times l}, B \in \mathcal{R}^{l \times n}, C \in \mathcal{R}^{m \times n},$$

```
for i=1,m //pętla po wierszach C (wierszach A)
for j=1,n //pętla po kolumnach C (kolumnach B)
for k=1,l //pętla po wektorach (kolumny A i wiersze B)
C(i,j)+=A(i,k)*B(k,j)
```

Ta konfiguracja to wiele mnożeń wierszy A przez kolumny B

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C = A * B \quad A \in \mathcal{R}^{m\times l}, B \in \mathcal{R}^{l\times n}, C \in \mathcal{R}^{m\times n},$$

```
for i=1,m //pętla po wierszach C (wierszach A)
for j=1,n //pętla po kolumnach C (kolumnach B)
call iloczyn_skalarny(A(i,1:l),B(1:l,j)
```

Ta konfiguracja to wiele mnożeń wierszy A przez kolumny B

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Implementacja mnożenia macierzy II

$$C = A * B \quad A \in \mathcal{R}^{m \times l}, B \in \mathcal{R}^{l \times n}, C \in \mathcal{R}^{m \times n},$$

```
for j=1,n //pętla po kolumnach C (kolumnach B)
for i=1,m //pętla po wierszach C (wierszach A)
for k=1,l //pętla po wektorach (kolumny A i wiersze B)
C(i,j)+=A(i,k)*B(k,j)
```

Ta konfiguracja to wiele mnożeń wierszy A przez kolumny B

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Implementacja mnożenia macierzy II

$$C = A * B \quad A \in \mathcal{R}^{m\times l}, B \in \mathcal{R}^{l\times n}, C \in \mathcal{R}^{m\times n},$$

```
for j=1,n //pętla po kolumnach C (kolumnach B)
for i=1,m //pętla po wierszach C (wierszach A)
call iloczyn_skalarny(A(i,1:l),B(1:l,j))
```

Ta konfiguracja to wiele mnożeń wierszy A przez kolumny B

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Implementacja mnożenia macierzy III

$$C = A * B \quad A \in \mathcal{R}^{m\times l}, B \in \mathcal{R}^{l\times n}, C \in \mathcal{R}^{m\times n},$$

```
for k=1,l //pętla po wektorach
        (kolumnach A i wierszach B)
  for i=1,m //pętla po wierszach C (wierszach A)
    for j=1,n //pętla po kolumnach C (kolumnach B)
      C(i,j)+=A(i,k)*B(k,j)
```

Ta konfiguracja odpowiada obliczaniu wielu rank-1 update

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Implementacja mnożenia macierzy III

$$C = A * B \quad A \in \mathcal{R}^{m\times l}, B \in \mathcal{R}^{l\times n}, C \in \mathcal{R}^{m\times n},$$

```
for k=1,l //pętla po wektorach
        (kolumnach A i wierszach B)
call rank-1-update(A(1:n,k),B(k,1:m)) //wiersze, kolumny
```

Ta konfiguracja odpowiada obliczaniu wielu rank-1 update

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Implementacja mnożenia macierzy IV

$$C = A * B \quad A \in \mathcal{R}^{m \times l}, B \in \mathcal{R}^{l \times n}, C \in \mathcal{R}^{m \times n},$$

```
for k=1,l //pętla po wektorach
        (kolumnach A i wierszach B)
  for j=1,n //pętla po kolumnach C (kolumnach B)
    for i=1,m //pętla po wierszach C (wierszach A)
      C(i,j)+=A(i,k)*B(k,j)
```

Ta konfiguracja odpowiada obliczaniu wielu rank-1 update

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Implementacja mnożenia macierzy IV

$$C = A * B \quad A \in \mathcal{R}^{m\times l}, B \in \mathcal{R}^{l\times n}, C \in \mathcal{R}^{m\times n},$$

```
for k=1,l //pętla po wektorach
       (kolumnach A i wierszach B)
call rank-1-update(A(1:n,k),B(k,1:m)) //kolumny, wiersze
```

Ta konfiguracja odpowiada obliczaniu wielu rank-1 update

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Tradycyjna implementacja mnożenia macierzy

```
int mm()
{
  int i,j,k;
  double sum = 0;
  for (i = 0; i < SIZE; i++) { //rows in multiply
    for (j = 0; j < SIZE; j++) { //columns in multiply
      for (k = 0; k < SIZE; k++) { //columns in first and rows in secon
        sum = sum + first[i][k]*second[k][j];
      }
      multiply[i][j] = sum;
      sum = 0;
    }
  }
  return 0;
}
```

Szybka implementacja mnożenia macierzy

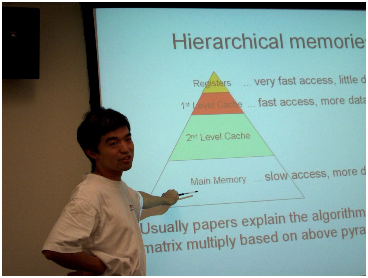


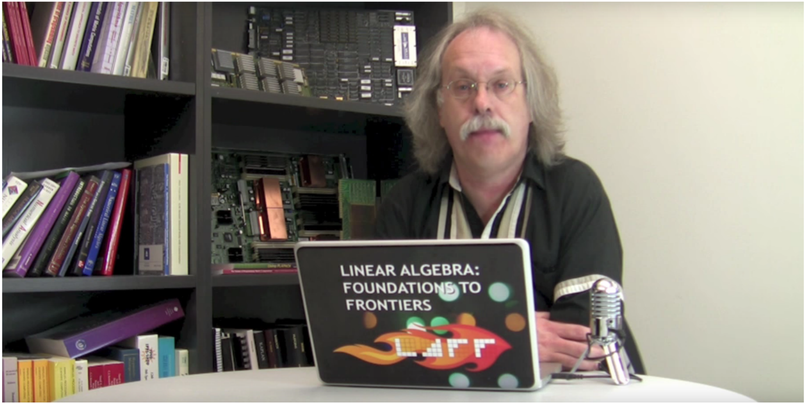
Figure: Kazushige Goto

Japoński inżynier pracujący w urzędzie patentowym. Opracował bibliotekę GotoBLAS do szybkiego mnożenia macierzy poprzez optymalizacji użycia cache'a procesora. W 2007 roku dostał ofertę pracy od prof. Roberta van de Geijna na Uniwersytecie Teksańskim w Austin. Od 2010 roku pracuje w Microsoft.

Goto, Kazushige; van de Geijn, Robert A. (2008), "Anatomy of High-Performance Matrix Multiplication", ACM Transactions on Mathematical Software, 34 (3): Article 12

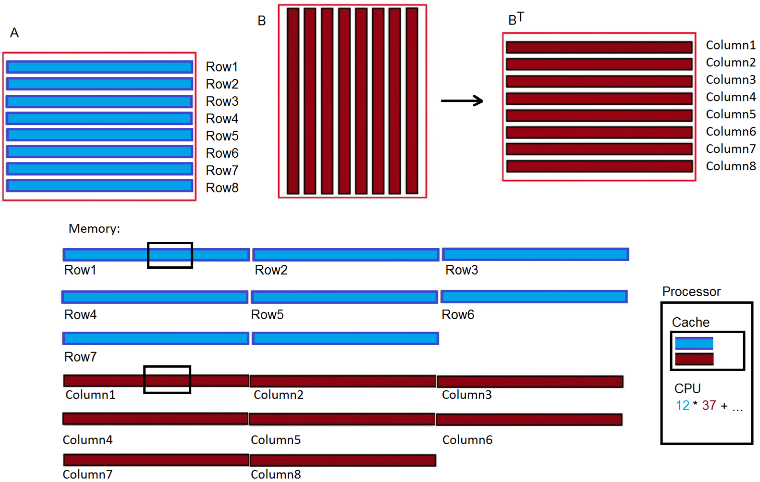
Szybka implementacja mnożenia macierzy

Nowoczesna optymalizacja mnożenia macierzy
prof. Robert van de Geijn z Uniwersytetu Teksańskiego w Austin



http://wiki.cs.utexas.edu/rvdg/HowToOptimizeGemm
http://ulaff.net

Szybka implementacja mnożenia macierzy: Zarys idei



Transponujemy macierz B, i rozwijamy pętle mnożenia. Teraz, wartości z macierzy A jak i wartości z B przesyłane są z pamięci RAM do cache'a procesora blokami i mnożenie wykonuje się na całym bloku naraz.

Szybka implementacja mnożenia macierzy: Zarys idei

```
int mm()
{
  int i,j,k;
  double sum = 0;
  for (i = 0; i < SIZE; i++) { //rows in multiply
    for (j = 0; j < SIZE; j++) { //columns in multiply
      for (k=0; k<SIZE; ){
        sum = sum + first[i][k]*second[j][k] //transpose
        + first[i][k+1]*second[j][k+1]
        + first[i][k+2]*second[j][k+2]
        + first[i][k+3]*second[j][k+3]
        + first[i][k+4]*second[j][k+4]
        + first[i][k+5]*second[j][k+5]
        + first[i][k+6]*second[j][k+6]
        + first[i][k+7]*second[j][k+7];
        k=k+8;
    }
    multiply[i][j] = sum;
    sum=0.0;
  }
```

"Krakowiany" czyli szybkie mnożenie macierzy

Figure: Tadeusz Banachiewicz , astronom, matematyk i geolog, urodzony 13 lutego 1882 w Warszawie, od 1919 pracował na Uniwersytecie Jagiellońskim, dyrektor obserwatorium astronomicznego w Krakowie, od 1945 roku pracował również na AGH, zmarł 17 listopada 1954 w Krakowie. Zdjęcie Apollo 11 kratera Banachiewicza na Księżycu.

Tadeusz Banachiewicz wynalazł w 1930 tzw. "Krakowiany" (transponowane macierze) które jak obecnie wiemy pozwalają przyspieszać mnożenie macierzy.
Mnożenie Krakowian odpowiada mnożeniu macierzy, gdzie jedna macierz jest transponowana i ponadto kolejność jest odwrócona

$$A@B = B^T A$$

Blokowe mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5+2*7 & 1*6+2*8 \\ 3*5+4*7 & 3*6+4*8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

(mnożenie macierzy 2 $\times$ 2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} = \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(blokowe mnożenie macierzy 4 $\times$ 4)

Blokowe mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5+2*7 & 1*6+2*8 \\ 3*5+4*7 & 3*6+4*8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

(mnożenie macierzy 2×2)

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(blokowe mnożenie macierzy 4×4)

Blokowe mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&10\\13&14\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\7&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11&12\\15&16\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&10\\13&14\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\7&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11&12\\15&16\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}0*1+0*5 & 0*2+0*6\\0*1+1*5 & 0*2+1*6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0*9+1*13 & 0*10+1*14\\0*9+0*13 & 0*10+0*14\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0*3+0*7 & 0*4+0*8\\0*3+1*7 & 0*4+1*8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0*11+1*15 & 0*12+1*16\\0*11+0*15 & 0*12+0*16\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0*1+0*5 & 0*2+0*6\\1*1+0*5 & 1*2+0*6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1*9+0*13 & 1*10+0*14\\0*9+0*13 & 0*10+0*14\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0*3+0*7 & 0*4+0*8\\1*3+0*7 & 1*4+0*8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1*11+0*15 & 1*12+0*16\\0*11+0*15 & 0*12+0*16\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Blokowe mnożenie macierzy

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0*1+0*5 & 0*2+0*6 \\ 0*1+1*5 & 0*2+1*6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0*9+1*13 & 0*10+1*14 \\ 0*9+0*13 & 0*10+0*14 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0*3+0*7 & 0*4+0*8 \\ 0*3+1*7 & 0*4+1*8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0*11+1*15 & 0*12+1*16 \\ 0*11+0*15 & 0*12+0*16 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0*1+0*5 & 0*2+0*6 \\ 1*1+0*5 & 1*2+0*6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1*9+0*13 & 1*10+0*14 \\ 0*9+0*13 & 0*10+0*14 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0*3+0*7 & 0*4+0*8 \\ 1*3+0*7 & 1*4+0*8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1*11+0*15 & 1*12+0*16 \\ 0*11+0*15 & 0*12+0*16 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(blokowe mnożenie macierzy 4×4)

Blokowe mnożenie macierzy

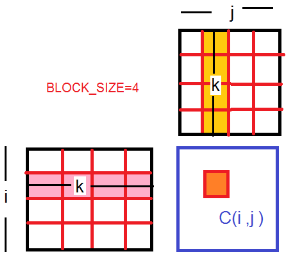
$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 14 & 15 & 16 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

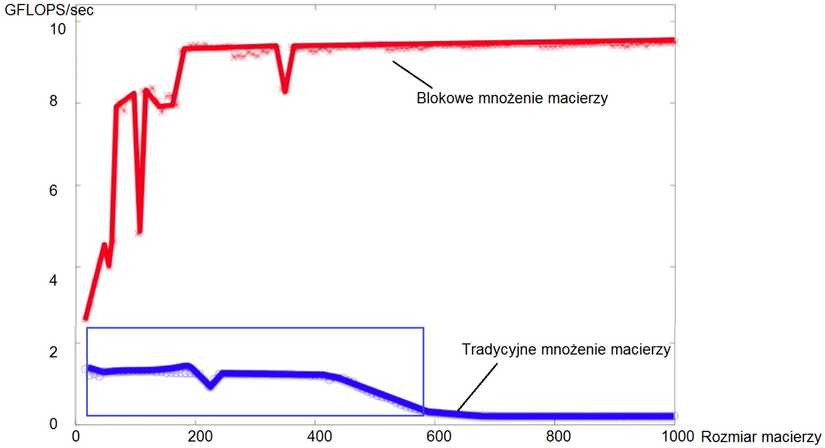
(blokowe mnożenie macierzy 4×4)

Blokowe mnożenie macierzy

```
double block_a[BLOCK_SIZE * BLOCK_SIZE];
double block_b[BLOCK_SIZE * BLOCK_SIZE];
double block_c[BLOCK_SIZE * BLOCK_SIZE];
int i,j,k;
for (i = 0; i < SIZE; i+=BLOCK_SIZE ) {
  for (j = 0; j < SIZE; j+=BLOCK_SIZE ) {
    for (k=0; k<SIZE; k+=BLOCK_SIZE ){
    copy_block(a, i, k, m, k, lda, block_a); // blok z macierzy A
    copy_block(b, k, j, k, n, ldb, block_b); // blok z macierzy B
    kernel_dgemm(block_a, block_b, block_c); // Przemnażamy dwa bloki
    merge_result(block_c,i,j,m,n,ldc,c); // Zapisujemy blok wynikowy w
```



Blokowe mnożenie macierzy



http://wiki.cs.utexas.edu/rvdg/HowToOptimizeGemm
prof. Robert van de Geijn, Uniwersytet Teksański w Austin)

—— Wiadomość oryginalna ——
Temat: Re: Slides
Data: 2020-02-13 15:00
Od: Robert Van De Geijn <rvdg@cs.utexas.edu>
Do: paszynsk@agh.edu.pl
To infinity, and beyond.
> On Feb 13, 2020, at 5:46 AM, Maciej Paszynski
<paszynsk@agh.edu.pl> wrote:
> Dear Robert,
> So now we will have:
> vector-vector blas 1
> vector-matrix blas 2
> matrix-matrix blas 3
> vector-tensor blas 4
> matrix-tensor blas 5
> tensor-tensor blas 6
> tensor order p - tensor order q blas p+q
> Best regards, Maciej

Szybkie mnożenie tensorów

Otwarty problem naukowy
Zaimplementowanie szybkiego blokowego mnożenia tensorów dla blas 5 lub wyżej
(rozwiązanie grozi doktoratem)

Algorytm Strassena blokowego mnożenia macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad P_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad P_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}, \quad P_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad P_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11}), \quad P_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad P_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12})$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad P_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$$

Algorytm Strassena blokowego mnożenia macierzy

$$P_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$$
$$P_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$$
$$P_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$$
$$P_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$$
$$P_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$$
$$P_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12})$$
$$P_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$$

$$\text{Strassen: } \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P_1 + P_4 - P_5 + P_7) & (P_3 + P_5) \\ (P_2 + P_4) & (P_1 - P_2 + P_3 + P_6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{Klasyczny (Binét): } \begin{bmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}) & (A_{11}B_{21} + A_{12}B_{22}) \\ (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}) & (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}) \end{bmatrix}$$

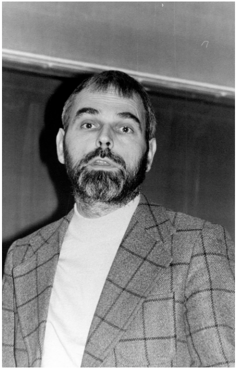


Figure: Volker Strassen (zdjecie z 1979 roku), niemiecki matematyk, urodziny 1936 roku w Dusseldorf. W 1969 roku wynalazł algorytm mnożenia macierzy o złożoności $\mathcal{O}(N^{2.8704})$

Jak Strassen dotarł do swojego pomysłu:
http://jacobminz.blogspot.com/2015/05/derivation-of-strassens-algorithm-for.html
(zawiera również kilka otwartych problemów naukowych)

Rekurencyjne mnożenie macierzy

$$\text{Klasyczny (Binét):} \begin{bmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}) & (A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}) \\ (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}) & (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}) \end{bmatrix}$$

8 mnożeń ($\mathcal{O}((n/2)^3)$), 4 dodawania ($\mathcal{O}((n/2))$)

$$\text{Strassen:} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P_1 + P_4 - P_5 + P_7) & (P_3 + P_5) \\ (P_2 + P_4) & (P_1 - P_2 + P_3 + P_6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$P_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \quad P_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$$
$$P_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22}) P_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11}) \quad P_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$$
$$P_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \quad P_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$$

7 mnożeń ($\mathcal{O}((n/2)^3)$), 18 dodawań ($\mathcal{O}(n/2)$)